Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática

Documento de trabajo nº5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo

n Curricular - Educación General Básica - Actualización Curricular - Educación Gene

1998

GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES

Jefe de Gobierno
Dr. FERNANDO DE LA RÚA

Vicejefe de Gobierno
Dr. ENRIQUE OLIVERA

Secretario de Educación
Prof. MARIO A. GIANNONI

Subsecretario de Educación
Dr. ROGELIO BRUNIARD

Directora General de Planeamiento
Lic. MARGARITA POGGI

Directora de Currícula
Lic. SILVIA MENDOZA

Como es de conocimiento público, durante el año 1998 se ha iniciado en el ámbito de la Ciudad de Buenos Aires el proceso que culminará con la sanción por la Legislatura de la Ley de Educación de la Ciudad. Esa ley establecerá el marco normativo para la organización y el funcionamiento del sistema educativo en esta jurisdicción. Hasta entonces, el proceso de actualización curricular se enmarca en la normativa que ha venido definiendo la implementación gradual y progresiva de la Educación General Básica (EGB):

Resolución N° 2846/95.	Primer ciclo de EGB.
Resolución N° 336/96 (15/10/96).	4°grado (1° año del segundo ciclo de EGB) para Escuelas de Gestión Privada.
Resolución N° 746/96 (4/12/96).	4°grado (1° año del segundo ciclo de EGB).
Resolución N° 15/98 (9/1/98).	5° y 6° grados (2° y 3°años del segundo ciclo de EGB).

En consecuencia, hasta la sanción de la mencionada ley, se dará continuidad a la denominación en uso.

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática

Documento de trabajo nº5.
La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo

Prof. Patricia Sadovsky
Lic. Cecilia Parra
Prof. Horacio Itzcovich
Lic. Claudia Broitman

DIRECCIÓN DE CURRÍCULA

Equipo de profesionales
a cargo de la actualización curricular del Nivel Primario

Asesora: Flavia Terigi
Coordinadora: Ana Dujovney.

Beatriz Aisenberg, Helena Alderoqui, Silvia Alderoqui, Clarisa Álvarez, Paula Briuolo, Claudia Broitman, Andrea Costa, José Chelquer, Graciela Domenech, Adriana Elena, Daniel Feldman, Claudia Figari, Silvia Gojman, Mariela Helman, Horacio Itzcovich, Mirta Kauderer, Verónica Kaufmann, Laura Lacreu, Delia Lerner, Silvia Lobello, Liliana Lotito, Gabriel Marey, Guillermo Micó, Susana Muraro, Nelda Natali, Alberto Onna, Silvina Orta Klein, Cecilia Parra, María Elena Rodríguez, Abel Rodríguez de Fraga, Patricia Sadovsky, Graciela Sanz, Analía Segal, Isabelino Siede, Mariana Spravkin, Adriana Villa, Hilda Weitzman de Levy.

ISBN 9879327-06-3

Hecho el depósito que marca la ley Nº 11.723

Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula
Bartolomé Mitre 1249 (1036) Buenos Aires

Índice

Introducción

Los diversos agentes del sistema educativo compartimos una preocupación por la casi ausencia de la geometría en la escuela, o porque su presencia se da en general bajo la forma de una enseñanza basada en la "presentación" de los objetos geométricos y sus propiedades sin oportunidad para los alumnos de atribuir sentido a esos conocimientos. En el documento Nº1 de Actualización Curricular en Matemática se plantea que "*el cambio fundamental propuesto se refiere al enfoque en la enseñanza de geometría, en el que ha de buscarse la construcción del significado de los contenidos espaciales y geométricos a través de su utilidad para resolver problemas*".

Conscientes de la importancia y al mismo tiempo de la dificultad que conlleva instalar dicho enfoque para Geometría –debido fundamentalmente a la escasez y falta de difusión de propuestas consistentes con el mismo- el equipo de Matemática se ha planteado la necesidad de producir un documento de Actualización Curricular relativo a la Enseñanza de la Geometría en el segundo ciclo que permita enriquecer el campo de ideas circulantes.

La complejidad del objeto sobre el que se propone trabajar y la complejidad de la comunicación didáctica señalaron la conveniencia de llevar adelante un trabajo con docentes que permitiera ajustar las propuestas y mejorar los textos que las vehiculizan.[1] Para ello se invitó a un grupo de docentes y coordinadores de ciclo, a través de los supervisores de distrito, a realizar un trabajo con el equipo responsable de este documento que consistió en:

- reuniones para trabajar problemas geométricos, buscando recuperar y caracterizar el quehacer geométrico
- momentos de intercambio sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría y sobre los rasgos centrales del enfoque que se propone
- reuniones de análisis y revisión de las secuencias didácticas elaboradas por el equipo coordinador
- desarrollo de las secuencias en las clases de los maestros participantes con observación y registro de las mismas
- reuniones para analizar y evaluar el trabajo realizado

Así, a partir del trabajo bibliográfico, análisis y discusiones dentro del equipo y de la experiencia desarrollada con docentes se llegó a la elaboración de este documento que consta de dos capítulos:

Un primer capítulo que, sin pretender abordar la totalidad de la problemática de la enseñanza de geometría en el segundo ciclo, propone reflexiones sobre qué es la geometría o más precisamente, qué es la geometría cuando se trata de un objeto que hay que enseñar en la escuela primaria; despliega la relación entre lo experimental y lo anticipatorio en este nivel de la enseñanza y postula que las construcciones constituyen un medio para conocer la figuras. Se considera que las diferentes maneras de gestionar las construcciones en la clase suponen para los alumnos oportunidades de elaborar el conocimiento geométrico. Por tanto se analizan las distintas modalidades de actividad en el aula precisando lo que cada una de ellas permite.

[1] La nómina de participantes y una descripción más precisa del trabajo realizado se presenta en la introducción del capítulo II

Un segundo capítulo que presenta las versiones revisadas de las secuencias didácticas llevadas adelante por los maestros que nos acompañaron. En cada caso se desarrollan las fichas didácticas y se presenta un apartado que recoge testimonios de los intercambios de los alumnos al que llamamos “Instantáneas del aula”.

Este documento no ha sido pensado en términos de que la primera parte provee la teoría y la segunda parte la aplicación, lo “concreto”. Ambas partes han sido elaboradas desde un marco teórico definido y ambas están centradas en las propuestas de enseñanza. Tanto en el análisis de las modalidades de actividad en el aula (cap. I) como en la presentación de las secuencias elaboradas (cap. II) se ha buscado permanentemente hacer explícitos los elementos teóricos que los sustentan y precisar el sentido de las opciones realizadas.

El tipo de discurso no es el mismo, varía el nivel de generalidad de los problemas abordados, pero a ambas partes las recorre el convencimiento de que es en cada una de las opciones que se toman al armar y desarrollar una clase o una secuencia de clases que se compromete el sentido de la enseñanza que se lleva adelante.

Asumimos haber dejado muchos aspectos por fuera, por ejemplo, no hemos considerado el tratamiento de algunos conceptos en los que se vincula geometría y medida (perímetro, área -en este caso porque vemos que tiene clara presencia en la escuela y tienen un cierto grado de difusión las propuestas que vinculan los aspectos más conceptuales con las habilidades de cálculo-). Entendemos que en este tipo de documentos se impone priorizar temas, aspectos y profundizar su desarrollo. En tal sentido elegimos revitalizar las construcciones y mostrar su rol, posible, en la elaboración de propiedades y de modo más general, en el acceso al modo de pensar propio de la geometría, al que los alumnos podrán acceder sólo si la escolaridad obligatoria en su conjunto lo asume como un largo proyecto de enseñanza.

Este documento, como todos los de la Dirección de Currícula, se dirige al equipo docente de cada escuela y a cada docente que, personalmente o con otros en situaciones de capacitación, busca oportunidades de reflexionar sobre sus concepciones y sobre sus prácticas y de adquirir nuevos conocimientos que lo ayuden a elaborar sus propuestas de enseñanza para garantizar más y mejores aprendizajes en todos los alumnos.

Como siempre, esperamos tener devoluciones que nos permitan también a nosotros revisar nuestras producciones y precisar las formas que han de tener nuestros aportes para ser verdaderamente útiles y pertinentes.

Capítulo I

El papel de las construcciones en la enseñanza de la geometría

1. Introducción

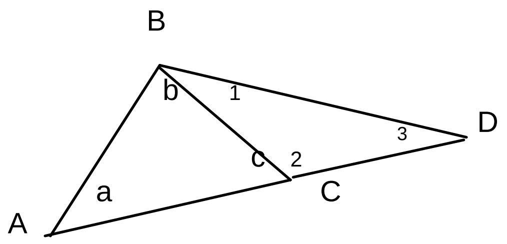
Existe una división tradicional en la matemática enseñada en la escuela: aritmética y geometría. Las cosas - todos lo sabemos - no están repartidas en forma pareja. La aritmética domina, la geometría pelea su espacio a duras penas.

Pero, ¿qué es lo que tienen en común la actividad aritmética y la geométrica para que ambas "ramas" se alojen en el dominio de la matemática?, ¿qué es la geometría?, o más precisamente, ¿qué es la geometría cuando se trata de un objeto que hay que enseñar en la escuela primaria?

Todos sabemos que la geometría "se trata" del estudio de las propiedades de las figuras y de los cuerpos. Claro, esta "definición" es tan amplia que podría albergar actividades de muy diversa naturaleza. Veamos un poco.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema.[2]

En el triángulo ABC el ángulo a mide 30° y el ángulo b mide 70°. Sobre la prolongación del lado AC se determina el punto D de manera que el segmento CD sea igual al segmento CB. Hallar los valores de los ángulos del triángulo DCB.



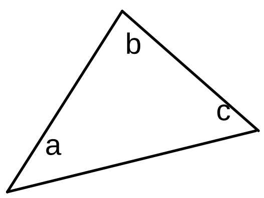
Hemos designado con los números 1, 2 y 3 a los ángulos del triángulo BCD.

El ángulo a mide 30º
El ángulo b mide 70º

$\overline{CB} = \overline{CD}$

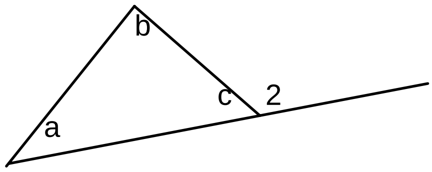
¿Cómo resolver este problema?. Una posibilidad es medir los ángulos 1 , 2 , y 3 del triángulo BCD con el transportador.

Otra posibilidad es hacer el siguiente análisis: como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º , el ángulo c debe medir 80º.

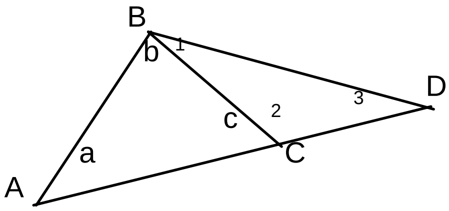


[2] Tomado del libro Problemas 1, de Olimpíada Matemática Ñandú, de Julia Seveso y Graciela Ferrarini.

Como los ángulos c y 2 son adyacentes, el ángulo 2 debe medir 100º .



Ahora bien, el triángulo BCD es isósceles porque hemos construído BC = CD. Resulta entonces que los ángulos 1 y 3 tienen la misma medida. Como entre los dos miden 80º , cada uno debe medir 40º pues el ángulo 2 mide 100º



¿Cuál es la diferencia entre los dos procedimientos?

En el primer caso, recurrimos a la medición. Para poder hacerlo, es necesario conocer qué es un ángulo, y saber medirlo de alguna manera, por ejemplo con transportador. Efectuada la medición, nos “encontramos” con el resultado. Desde el punto de vista de quien hace la experiencia podría tratarse de un hecho contingente : los valores son estos, pero nada indica que no podrían haber sido otros.

El segundo procedimiento es **anticipatorio** respecto de la experiencia de medir: se relacionan elementos del problema (el triángulo BCD es isósceles, los ángulos ACB y BCD son adyacentes) con algunos conocimientos sobre las figuras (la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, en un triángulo isósceles los ángulos que se oponen a lados iguales son iguales) y se establece que **necesariamente** los ángulos tienen los valores hallados.

Aunque ambos procedimientos han sido puestos en juego para resolver el mismo problema, suponen desde nuestra perspectiva actividades matemáticas muy distintas. La diferencia central está marcada por el papel que juegan las propiedades de las figuras en la resolución del problema.

Profundicemos un poco más el procedimiento de medición de los ángulos. Quien recurre a este método no ha usado el conocimiento de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo ni de los ángulos en un triángulo isósceles para sustituir la experiencia. Esto no significa que desconozca las propiedades en cuestión. En realidad no sabemos si las conoce o no. Simplemente no las ha usado para establecer las medidas de los ángulos de manera independiente de un hecho experimental.

Podría ocurrir que, como resultado de la medición, la suma de los valores hallados no fuera 180º o que los ángulos CBD y CDB no resultaran iguales[3]. Si este fuera el caso, no estarían en las mismas condiciones quienes, apoyados en el

[3] En realidad, como resultado de un proceso de medición se obtendrán valores aproximados. De todos modos no es ese el punto en el que estamos centrados acá.

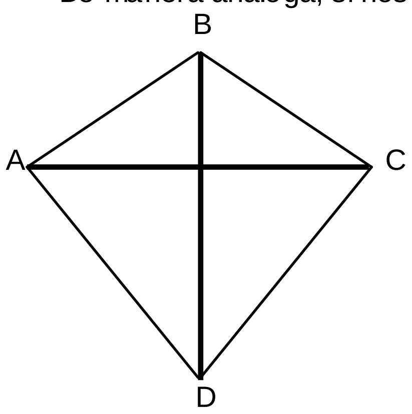
conocimiento de las propiedades, son capaces de detectar la incompatibilidad de los resultados que quienes aceptan los mismos sin cuestionarlos. Quienes se dan cuenta de la incompatibilidad recurren al conocimiento para **controlar** la experiencia aunque no lo hayan usado para **anticiparla**.

Un procedimiento como el relatado en segundo término puede implicar diferentes niveles de generalidad en función del bagaje teórico de quien lo pone en juego. Efectivamente, un maestro o un profesor, por ejemplo, sabrán que las relaciones que ellos establecen a partir de un dibujo son válidas para la figura que cumple las condiciones del problema y, por lo tanto, para cualquier dibujo que la represente. En el caso de los chicos en cambio esta generalización no es inmediata: al interactuar con cierto dibujo será difícil que se formulen preguntas sobre el alcance de las relaciones establecidas.

Para poner en juego un procedimiento de tipo anticipatorio es necesario aprender a inferir a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas en el enunciado y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación. Este aprendizaje es parte del trabajo en geometría.

El aspecto anticipador de la actividad geométrica es justamente uno de los puntos de "unión" entre aritmética y geometría. Efectivamente, las operaciones y sus propiedades nos permiten economizar la experiencia de contar : si sabemos, por ejemplo, que una caja contiene 6 lápices, podremos saber el contenido de tres cajas del mismo tipo que la mencionada recurriendo a la operación 6 x 3. En ese caso la operación de multiplicar nos permitirá sustituir la experiencia de contar uno por uno los lápices.

De manera análoga, si nos informan que BD es la mediatriz de AC,



podremos inferir que la figura ABCD es un romboide sin necesidad de hacer ninguna medición. Para poder establecerlo es necesario conocer que todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo. (En el caso de la figura BA es igual a BC y DA es igual a DC).

Ahora bien, ¿Cómo construyen los alumnos esta racionalidad particular que usa las propiedades para tomar decisiones que sustituyan a la experiencia? ¿Qué beneficios les aporta la entrada en este "juego"? ¿Contribuyen las experiencias a que el alumno elabore conocimiento? ¿Tienen todas las experiencias el mismo valor desde el punto de vista de la elaboración del conocimiento? ¿Cómo se elaboran esas "primeras propiedades" en las que los chicos se tienen que basar para establecer el carácter necesario de otras? ¿No hay de entrada una base experimental para elaborar algunas cuestiones que después pondrán en juego para otros problemas más complejos? ¿Cómo es en realidad la relación entre lo experimental y lo anticipatorio? ¿Tiene sentido hablar de estas cuestiones en términos tajantes o habrá más bien que pensar en un proceso en el que se irán nutriendo una a la otra?[4]

A través de este documento iremos aportando algunos elementos para avanzar en la discusión de estas cuestiones.

2. El estudio de las figuras: un objeto central de la geometría en el segundo ciclo.

Acerca de (la evolución de) las relaciones entre dibujo y figura

El estudio de las figuras planas es uno de los objetos centrales de la geometría en el segundo ciclo. Pero, ¿En qué pensamos cuando hablamos de figuras en este nivel de la enseñanza? ¿Qué significa estudiar figuras?: ¿Reconocerlas perceptivamente? ¿Recordar sus nombres? ¿Clasificarlas según diferentes criterios? ¿Enunciar sus propiedades? ¿Usar las propiedades para resolver problemas? ¿Elaborar las propiedades a través de la resolución de problemas?...

Si nos preguntamos qué son las figuras la respuesta no es la misma desde la perspectiva de los alumnos que desde el conocimiento del docente. En las primeras aproximaciones de los niños, las figuras son tratadas esencialmente como dibujos. Es decir son marcas en el papel cuya interpretación está fundamentalmente basada en la percepción y acerca de las cuales no se plantean todavía relaciones que puedan ser generalizadas. ¿Qué queremos decir?

Un niño que ingresa a la escuela es capaz de reconocer el dibujo de un cuadrado. Pero si le preguntáramos cómo sabe que el dibujo que está viendo representa un cuadrado, seguramente quedaría desconcertado por la pregunta y su respuesta sería más o menos : "*porque sí, porque es un cuadrado*". Es decir, nuestro niño reconoce el cuadrado globalmente, sin acceder necesariamente a las propiedades que lo caracterizan. Podemos decir que él "ve" el cuadrado pero no "ve" los ángulos rectos ni los lados iguales. Si le preguntáramos a un chico de sexto grado cómo saber si cierto dibujo representa un cuadrado, seguramente esperaríamos que nos responda que hay que verificar que tiene los lados iguales y los ángulos rectos. El niño pequeño y el alumno de sexto grado no "ven" lo mismo frente al mismo dibujo del cuadrado[5].

Pensemos ahora en la circunferencia : los chicos están en condiciones de reconocerla y de diferenciarla de otras figuras mucho antes de saber que se trata del conjunto de puntos que equidistan de un centro. Por otro lado, esta última propiedad no va a ser accesible por el sólo hecho de "observar" pasivamente dibujos de circunferencias. Será necesaria cierta actividad intelectual que trascienda el nivel perceptivo para que la propiedad se torne observable. [6]

[4] Entendemos como experimental a la obtención de información a raíz de algún tipo de acción física: medir longitudes, plegar, recortar, superponer, etc.
[5] Las comillas apuntan a enfatizar que estamos concibiendo el "ver" como consecuencia del "conocer" y no como producto de una observación pasiva.
[6] Al respecto ver la secuencia de actividades propuesta para 4to grado.

Para analizar más profundamente esta cuestión puede ser útil considerar la distinción entre dibujo y figura que realizan numerosos autores. Según Parzysz [7], "**la figura es el objeto geométrico descripto por el texto que la define, una idea, una creación del espíritu, en tanto que el dibujo es una representación de este objeto"**.

Las relaciones entre dibujo y figura son complejas y van cambiando en función de los conocimientos que los niños van elaborando : el dibujo "muestra" relaciones vinculadas al objeto geométrico teórico, siempre y cuando el sujeto que interpreta el dibujo posea o esté elaborando un caudal de conocimientos que le permita identificarlas. Como analizábamos en el ejemplo del cuadrado, un mismo dibujo puede remitir al establecimiento de relaciones muy diversas.

Las cosas no son - por supuesto - blanco o negro. Decir que unos perciben sin conceptualizar propiedades y que otros pueden captar todas las propiedades a través de un dibujo que las represente, no responde a lo que en realidad sucede en la interacción con las figuras. A medida que evolucionan las conceptualizaciones que los niños elaboran, se vuelven cada vez más observables en el dibujo las propiedades del objeto que ese dibujo representa. Claro que esa evolución es producto de un aprendizaje y este aprendizaje no es espontáneo. Supone la resolución de problemas que exijan - y posibiliten - la elaboración del conocimiento al que los niños deberían acceder. Por eso, ubicados en esta perspectiva, nos preguntamos bajo qué condiciones evolucionan las relaciones que los niños son capaces de establecer en relación con las figuras.

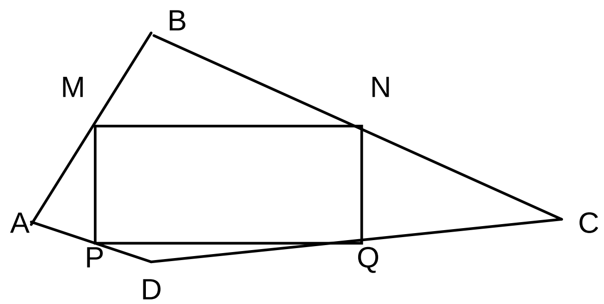
Las consideraciones anteriores apuntaban a analizar la problemática de los aspectos que se hacen observables a través de un dibujo en tanto representación de un objeto geométrico. Hay otra cuestión que es interesante tratar a propósito de las relaciones entre dibujos y figuras.

Al enfrentar un problema geométrico es útil recurrir a un dibujo para representar las relaciones que el problema plantea, pero no es posible, en general, resumir en el dibujo todas esas relaciones que caracterizan la situación con la que se está trabajando. ¿A qué nos referimos?

Consideremos, por ejemplo, el siguiente enunciado :

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera y sean M, N, P y Q los puntos medios de sus lados. ¿Qué clase de cuadrilátero es MNPQ ?

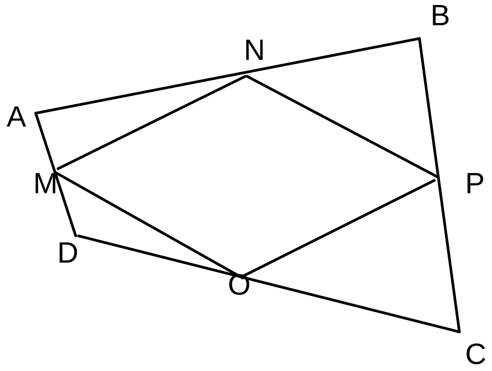
Si realizamos el siguiente dibujo para representar el problema



[7] Citado por C. Laborde y B. Capponi (1994).

"vemos" que MNPQ es un rectángulo.

En cambio si el dibujo para representar la situación fuera éste



nos "mostraría" que el cuadrilátero en cuestión es un rombo.

En realidad, si hiciéramos un análisis geométrico, llegaríamos a la conclusión de que MNPQ es siempre un paralelogramo y que, bajo ciertas condiciones particulares, ese paralelogramos puede ser cuadrado, o rectángulo o rombo.

El ejemplo apunta a mostrar que el problema, planteado a través de un texto, supone un conjunto de relaciones que no pueden ser todas captadas por un único dibujo (Laborde y Capponi ,1994).

Así como los dibujos no suelen dar cuenta de todas las propiedades de la situación que representa, ocurre muchas veces que los alumnos infieren del dibujo propiedades que no forman parte del objeto geométrico con el que se está trabajando. Un ejemplo típico de ello es la posición del dibujo en relación con la hoja de papel. Los maestros reconocerán la dificultad de los niños de "liberar" las figuras de ciertas posiciones: para ellos, en muchas ocasiones, un cuadrado "torcido", por ejemplo, deja de ser cuadrado.

En síntesis, tener en cuenta la diferenciación entre dibujo y figura resulta una herramienta didácticamente útil para:

- poner en cuestión el punto de vista según el cual la representación de un objeto geométrico permite "ver" todas las propiedades que caracterizan dicho objeto,
- tomar conciencia de la imposibilidad de resumir en un dibujo todas las relaciones que caracterizan una situación,
- discriminar entre el conjunto de relaciones espaciales que pueden inferirse de un dibujo, cuáles son propiedades del objeto que se representa y cuáles no.

Hemos tratado de diferenciar un objeto geométrico de su representación a través de un dibujo. Hecha la distinción, tal vez sea el momento de señalar el rol fundamental que juegan los dibujos en geometría, tanto en el aprendizaje como en la resolución de problemas que enfrenta un experto.

Avanzar en la enseñanza de las propiedades de las figuras supondrá, durante bastante tiempo, proponer situaciones en las cuales los niños puedan elaborar esas propiedades a propósito de dibujos particulares. En este proceso, como veremos, las construcciones tendrán un papel esencial y el dominio de ciertas habilidades necesarias para efectuarlas (uso de los útiles, precisión en el trazado, etc) debe, desde nuestro punto de vista, estar subordinado al aprendizaje de los conceptos subyacentes a esas habilidades.[8]

Aunque el tratamiento de las figuras como dibujos será preponderante en los primeros años de la escolaridad, consideramos importante plantear un proyecto de enseñanza que tenga en perspectiva y asuma en el momento conveniente la evolución de las relaciones que los niños han de establecer entre los dibujos y los objetos geométricos que esos dibujos representan.

Se trata de un proyecto a muy largo plazo en el que los alumnos deberán tener la oportunidad de enfrentarse con situaciones que les exijan hacer anticipaciones, tomar decisiones basadas en conocimiento geométrico, encontrar maneras de validarlas. En ese camino, a la par de la evolución de las relaciones entre dibujo y figura, irán evolucionando también las relaciones entre lo experimental y lo anticipatorio.

Hemos señalado anteriormente la insuficiencia del dibujo para definir un objeto geométrico. Para hacerlo resulta necesaria la explicitación de las relaciones que caracterizan al objeto : un paralelogramo - por ejemplo - no se define mostrando un dibujo sino a través de la proposición "un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos paralelos". Arsac (1992) plantea que la práctica geométrica es un ida y vuelta constante entre un texto y un dibujo. Por este motivo pensar en las distintas instancias en las que los alumnos tengan la oportunidad de vincular textos que describen relaciones referidas a una figura con los dibujos que representan dicha figura, puede resultar una manera de organizar parte de la actividad geométrica del aula. De esta cuestión nos ocuparemos en el próximo punto.

3. Las construcciones: un medio para conocer las figuras

Bajo ciertas condiciones, el trabajo alrededor de las construcciones de figuras puede favorecer la puesta en juego - explícita o implícita - de algunas de las relaciones que las caracterizan. Las diferentes maneras de gestionar las construcciones en la clase supondrán para los alumnos distintas formas de desplegar el conocimiento geométrico. En los párrafos que siguen analizaremos distintas modalidades: dictado de figuras, copiado, construcción a partir de pedido de datos, construcción a partir de datos dados. El orden en el que las exponemos en este material es arbitrario, no supone complejidad creciente y no se propone como un orden para la enseñanza. Por el contrario, una secuencia puede combinar diferentes actividades en función de los objetivos a los que apunta el docente y, como veremos, dentro de cada modalidad se reconocen variables que la hacen más o menos compleja.

Las variables de una situación son aquellos aspectos cuya modificación produce cambios en las estrategias de resolución de los alumnos y en su relación con las nociones puestas en juego. En las construcciones algunas variables didácticas pueden ser el tipo de hoja o los instrumentos que se habilitan.

[8] Este planteo será retomado más adelante.

3.1 Dictar figuras: del dibujo al texto y del texto al dibujo
3.1.1 Descripción de la actividad [9]

La clase se organiza en una cantidad par de grupos, la mitad de los grupos serán A y la otra mitad B. Cada grupo A, trabaja apareado con un grupo B, formando un solo equipo. La maestra entrega una figura (la misma) a los grupos A y otra a los grupos B.

Consigna: Cada grupo (A o B) tiene que escribir un mensaje que contenga todas las informaciones que consideren necesarias como para que la otra parte del equipo (B o A) pueda construir la figura sin verla. Si al recibir el mensaje no entienden algo, pueden pedir aclaraciones por escrito. Cuando ambos grupos de cada equipo terminen, se van a reunir y van a comprobar si las figuras que realizaron pueden superponerse exactamente con las que recibieron. Si las figuras no coinciden, entre todos van a tratar de analizar dónde estuvo la falla.

3.1.2 Análisis de la actividad

Describir la figura a través de un texto supone trascender la interpretación perceptiva y comenzar a buscar cuáles son los elementos y las relaciones que la definen. Esta es una manera de empezar a conocer la figura; como decíamos en el punto anterior, es un modo de empezar a "ver" en el dibujo aquellas propiedades que la escuela está interesada en comunicar.

Para producir el mensaje los niños deben decidir cuáles son las informaciones necesarias para que los receptores puedan reproducir el dibujo sin verlo. En tanto la figura que plantea el docente es un objeto a conocer, no es razonable esperar que los niños puedan ubicar de entrada cuáles son esas informaciones. Lo más probable es que los primeros mensajes en relación con una figura contengan informaciones no pertinentes, o insuficientes, o excesivas, o ambiguas. Por eso, más que pensar en una única actividad, es necesario concebir el dictado de figuras como una secuencia de actividades a través de las cuales irán evolucionando los mensajes que los niños produzcan.

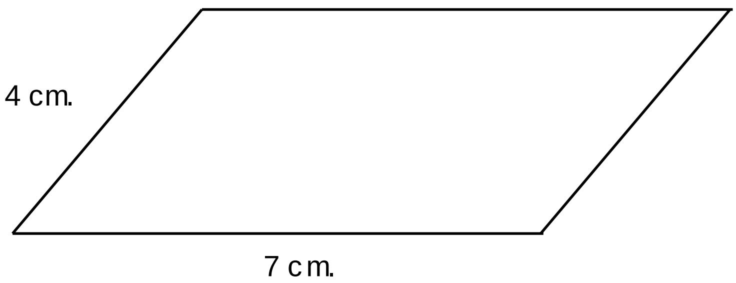
Describir una figura (tarea que se realiza en el momento que los chicos producen los mensajes) y construirla a partir de su descripción textual (trabajo de los alumnos cuando están en función de receptores) son actividades que cumplen, desde el punto de vista didáctico con un objetivo doble: **que los niños busquen nuevas relaciones para caracterizar la figura y que pongan en juego las concepciones que ellos tienen en relación con esa figura con la que están trabajando**. Tanto los mensajes que los niños producen, como las construcciones que realizan a partir de los mismos, son portadores de los significados que ellos van construyendo en relación con la figura. ¿Qué significa esto ? Analicémoslo a través de ejemplo.

En un quinto grado, los alumnos se estaban dictando paralelogramos [10]. Los emisores envían el siguiente mensaje

---

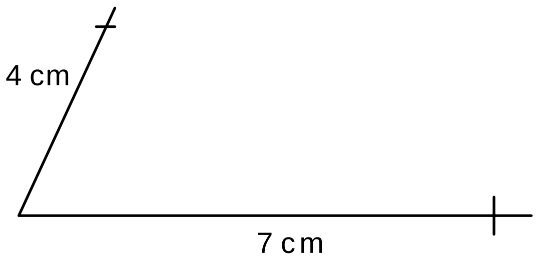
[9] Actividad originalmente elaborada por G. Brousseau.

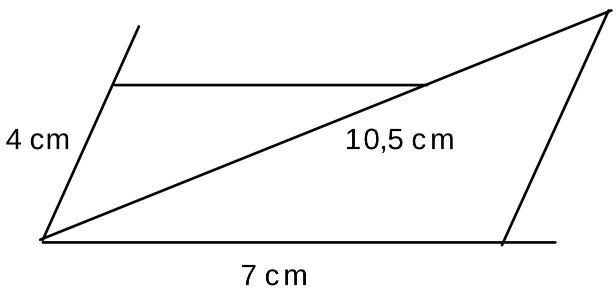
[10] Los alumnos venían trabajando con el tema paralelogramos. Se habían realizado unos cuantos dictados de paralelogramos que habían permitido identificar que los ángulos opuestos son iguales, que los lados opuestos son iguales y que el punto de intersección de las diagonales es punto medio de cada una.



"Tracen un paralelogramo con un lado de 7 cm, otro lado de 4 cm y la diagonal de 10 cm y ½"

El grupo receptor realiza la siguiente construcción:





Al no poder "cerrar" el paralelogramo, envían a los emisores el siguiente mensaje

"Con los datos que ustedes mandaron no se puede construir el paralelogramo"

Los emisores responden que sí es posible construir el paralelogramo, pero los receptores insisten en su posición. La maestra invita a emisores y receptores a reunirse para discutir la cuestión y, a partir de la discusión los emisores convencen a los receptores que la construcción que hacían *"estaba mal, porque nuestro paralelogramo es más inclinado, no hay que hacer primero el ángulo"*

Analicemos este tramo de la clase. Al hacer la construcción los receptores consideran un dato que los emisores no enviaron: el ángulo entre los dos lados. ¿Es esto casual? Es bastante razonable pensar - hay numerosos resultados de investigación en ese sentido[11] - que los alumnos implícitamente están apelando a una representación interna del paralelogramo según la cual la “inclinación” entre los dos lados se mantiene siempre estable. Los datos enviados por sus compañeros se vuelven incompatibles con el dato del ángulo que los niños incorporan de manera implícita.

La actividad introduce en la escena del aula la posibilidad de poner en cuestión una cierta manera de concebir el paralelogramo. En otras palabras, a partir de la confrontación que se pueda generar al tratar de analizar cuál es la razón por la cual los receptores no pueden realizar la construcción, los niños comenzarán a ampliar el conjunto de paralelogramos posibles, aceptando que puede haber algunos “más aplastados” y otros “más derechitos” que los que usualmente aparecen en los dibujos con los que ellos interactúan.

Veamos una manifestación de la misma concepción en el momento de la producción de mensajes. En el marco de la misma actividad -dictado de paralelogramos - los emisores envían el siguiente mensaje

“Dibujar un paralelogramo que tiene un lado de 6 cm y otro de 4 cm”

El paralelogramo que los alumnos deben dictar responde al modelo de figura típica (ver nota al pie Nº 11). Por eso, los alumnos piensan que los lados son suficientes ya que el ángulo está dado de manera implícita. En otras palabras, desde el punto de vista de ellos no hay infinitos ángulos posibles sino uno sólo y por eso no consideran necesario explicitarlo. Nuevamente, para que los alumnos movilicen esta concepción habrá que gestar alguna discusión al respecto.

¿Son importantes estas discusiones? Desde nuestra perspectiva, avanzar en el conocimiento supone no sólo elaborar nuevas propiedades sino también rechazar aquellas que no corresponden al objeto con el que se está trabajando. Este rechazo sólo es posible si las concepciones - erróneas, o parciales, o restringidas - se manifiestan a través de alguna actividad. De otra manera ¿cómo podría el docente discutir esta cuestión con los alumnos?

Supongamos, por un momento, que para ahorrar tiempo - propósito totalmente válido - el maestro preguntara a sus alumnos si los paralelogramos pueden tener distintas inclinaciones. Supongamos también - hecho muy probable - que los niños respondieran afirmativamente. ¿Significaría esta respuesta que los alumnos han puesto en cuestión su concepción restringida de paralelogramo? Nosotros pensamos que no necesariamente. ¿Por qué?

El rechazo de una concepción también es construcción de conocimiento y como tal requiere enfrentar situaciones a través de las cuales se manifiesten las limitaciones de esa concepción. Notemos que es lo que ocurre cuando los chicos intentan construir el paralelogramo y “no les cierra”.

Los ejemplos intentan mostrar de qué manera la actividad de dictado de figuras permite tanto desplegar las concepciones de los alumnos en relación a las figuras como avanzar en la elaboración de conocimiento. Claro que esto es posible no sólo a partir de la producción de mensajes y de la realización de las construcciones, sino también- y fundamentalmente - a través de las interacciones que se generan a partir de la actividad. Al respecto, Colette Laborde [12] enfatiza el papel de la comunicación

---

[11] Esta representación según la cual la “inclinación” entre los lados es más o menos estable es llamada por muchos autores figura típica. FREGONA,D (1995) y BERTHELOT y SALIN (1992).

[12] Laborde, C. (1991).

en la producción tanto de nuevas relaciones como de un repertorio lingüístico para describirlas: *"un emisor puede renunciar a una descripción si él juzga que el receptor no la comprenderá porque es muy complicada, o suministrar elementos de descripción complementarios porque toma conciencia de que los elementos dados no son suficientes para caracterizar la figura. La interiorización de las exigencias de la comunicación puede entonces llevar al emisor a progresar en el análisis geométrico de la figura".*

La validación en el dictado de figuras

Uno de los objetivos de la enseñanza de la matemática - y tal vez de todas las disciplinas - es que los alumnos puedan arribar por sí mismos a una conclusión respecto de la validez de los procedimientos que han puesto en juego y de los resultados que han obtenido. A este proceso por el cual los alumnos pueden hacer un juicio respecto de su propia producción, lo llamamos validación.

Analizaremos a continuación la validación a través de la actividad de comunicación de figuras y para eso nos basaremos en el trabajo de Dilma Fregona [13] quien hace un estudio exhaustivo de esta problemática.

Tal cual se plantea en la consigna, luego de realizar la construcción a partir del mensaje, los alumnos deben superponer su dibujo con el propuesto por el docente. El hecho de que los dibujos coincidan significa para el equipo el éxito del trabajo. Es razonable pensar que, si los dibujos pueden superponerse, los niños emitirán un juicio favorable respecto de su actividad. Dilma Fregona señala que hay en esta etapa un primer nivel de validación. Sin embargo, puede ocurrir - numerosos investigadores lo han identificado [14] - que los dibujos coincidan sin que la actividad pueda considerarse satisfactoria teniendo en cuenta los objetivos de conocimiento a los que apunta el docente. ¿Por qué?

Retomemos el ejemplo del dictado de paralelogramos en el que un grupo produce el siguiente mensaje:

"Dibujar un paralelogramo que tiene un lado de 6 cm y otro de 4 cm"

Ya hemos dado una interpretación posible: los emisores no necesitan explicitar la medida del ángulo porque ellos tienen una concepción de paralelogramo según la cual los ángulos que forman los lados son más o menos fijos, y el dibujo acerca del cual tienen que producir el mensaje se corresponde con esa concepción. Si los receptores también la comparten, es probable que realicen un dibujo que coincida con el original. El hecho de que emisores y receptores coincidan en una cierta manera - restringida- de concebir el paralelogramo los lleva a considerar exitoso un mensaje que no es pertinente desde el punto de vista matemático (ya que existen infinitos paralelogramos que responden a los datos suministrados). Evidentemente es necesario que el docente intervenga. La cuestión puede dar lugar a una discusión con el conjunto de la clase a partir de la cual los alumnos puedan tomar conciencia de que el mensaje da lugar a infinitos dibujos posibles. Se tendrá entonces la oportunidad de arribar a un nuevo acuerdo en la clase: **para aceptar un mensaje, el mismo debe dar lugar a una única figura.**

Venimos planteando que uno de los objetivos de la actividad de dictado de figuras es lograr que los alumnos lleguen a encontrar formas de caracterizar las figuras

[13] Fregona, D. (1995).
[14] Margolinas,C. (1993); Grenier, D. (1988) ; Laborde,C. (1991).

con las que trabajan. Hemos dicho también que este objetivo será el producto de una secuencia de actividades y no de una única instancia. Por eso cuando se diseña una secuencia, se debe pensar en momentos en los que los alumnos producen mensajes y construyen dibujos, momentos en los que hay intercambios entre los grupos de un mismo equipo, momentos de debate acerca de la pertinencia de los mensajes y nuevas instancias de dictado que permitan poner a prueba los conocimientos ya elaborados así como producir otros nuevos.

En el desarrollo de la secuencia será interesante que los alumnos aprendan a ajustar las informaciones necesarias para reproducir la figura. ¿Qué pasa, por ejemplo, si para dictar un cuadrado en cuarto grado, los niños escriben:

"Tienen que hacer un cuadrado que tenga los cuatro lados de 4 cm y los cuatro ángulos rectos"

Evidentemente el mensaje contiene más información de la necesaria para realizar exitosamente la construcción. Pero más información ¿desde qué punto de vista? Obviamente desde la perspectiva de quien ya ha elaborado cierto conocimiento sobre el cuadrado. Será un objetivo de la secuencia que los niños aprendan a minimizar la información necesaria. En el caso del ejemplo será interesante explicitar el significado que se atribuye en la clase a la palabra cuadrado. Si ya la misma contiene la información de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos, alcanza con decir: *"Hacer un cuadrado cuyo lado es de 4 cm".*

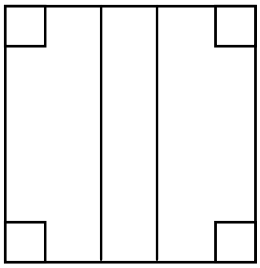
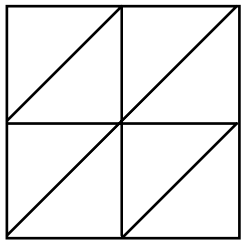
En relación con la optimización de mensajes D. Fregona señala que se trata de una exigencia que sólo puede ser considerada como objetivo al cabo de una secuencia : dado que para los niños el objetivo es obtener una figura que se pueda superponer, un mensaje sería más seguro si da la mayor información posible. Es razonable que los niños piensen que si las informaciones no son necesarias para reproducir la figura en cuestión, pueden servir "para verificar". La autora cita a un grupo de niños de las clases que ha estudiado, que para dictar un rombo explicitan las medidas de las diagonales y del lado: *"con las medidas de las diagonales se puede construir un rombo, pero la medida de un lado sirve para verificar".*

Sintetizando, la producción de mensajes debe:

- permitir reproducir dibujos que se superpongan con el modelo original
- dar lugar a una única figura
- contener la mínima cantidad de informaciones.

Es interesante que nos preguntemos al servicio de qué conocimientos podría estar la actividad del dictado de figuras. La respuesta es muy amplia, dado que las elaboraciones que los alumnos puedan hacer dependen también del tipo de figuras con las que se les proponga trabajar. Efectivamente, podríamos organizar una secuencia de dictados para discutir algunos aspectos de los cuadriláteros en quinto grado, pero también podríamos trabajar en cuarto grado con figuras como las siguientes[15]

[15] Propuestas en una secuencia para cuarto grado. Saiz,I (1996).

si estamos centrados en que los niños empiecen a considerar la figura en tanto conjunto de relaciones y produzcan el lenguaje necesario para formularlas.

En la introducción de este documento nos hemos referido al carácter anticipatorio de la actividad geométrica y nos hemos preguntado por la relación entre lo experimental y lo anticipatorio. ¿Cómo juegan estas cuestiones en la comunicación de figuras?

El análisis realizado apunta a mostrar que la producción de mensajes da lugar a la elaboración de propiedades que permiten caracterizar una figura y del vocabulario necesario para formular dichas propiedades. En el curso de la actividad, los niños recurren a la experimentación (superposición de dibujos) para controlar el resultado de sus acciones; este control pone muchas veces en cuestión sus propias conceptualizaciones dando lugar a nuevas elaboraciones y, por lo tanto, a anticipaciones más ajustadas.

3.2 Copiar figuras

Copiar una figura puede ser una manera de empezar a pensarla en términos de los elementos que la constituyen pero, a diferencia del dictado, la actividad no exige la explicitación de las relaciones que se identifican ni está sometida a las exigencias que plantea la comunicación con otro.

Las conceptualizaciones que los niños puedan hacer a través del copiado de una figura, dependerán de las condiciones en las que dicha tarea se realice. Nosotros consideraremos dos situaciones diferentes:

i) el dibujo se hace teniendo presente el modelo
ii) el modelo está fuera de la vista del alumno mientras realiza el dibujo ; él debe tomar las informaciones que considere necesarias antes de comenzar a dibujar.

Por otra parte, también analizaremos la situación en la que los niños tienen que copiar una figura pero en un tamaño diferente del modelo original.

El dibujo se realiza teniendo presente el modelo

Se trata de copiar un dibujo que el docente proporciona, de manera que la copia pueda superponerse con el original entregado. En tanto el alumno tiene el modelo a su alcance, la actividad le exige un bajo nivel de anticipación. Esto se debe a que puede ir haciendo correcciones sobre la marcha, muchas veces sin llegar a tomar conciencia de las razones de los errores que puede ir cometiendo.

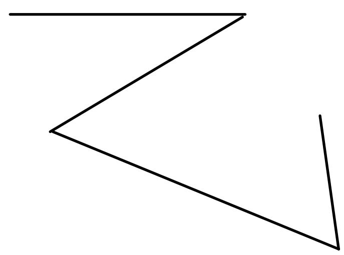
Sin embargo, la tarea puede resultar interesante en las primeras interacciones con un cierto tipo de figura, cuando se intenta que los alumnos comiencen a trasponer el nivel perceptivo e identifiquen algunas relaciones que la constituyen.

Es interesante pensar en esta actividad inserta en una secuencia en la que también se proponen otros problemas en los que es necesario utilizar de modo más explícito los nuevos aspectos que se pudieron reconocer.

Los útiles de geometría que se permiten para hacer el dibujo y el tipo de papel en el que se realizará (liso, con renglones, cuadriculado) son variables que modifican las exigencias que la situación representa para él. Analizaremos algunos ejemplos.

Copiar para identificar nuevos elementos

Nos ubicamos en cuarto grado. Estamos interesados en introducir la noción de ángulo y para ello proponemos que los niños copien el siguiente dibujo [16]



Si el dibujo fuera dado en papel cuadriculado y se permitiera reproducirlo también en papel cuadriculado, el trabajo podría realizarse exitosamente **sin que se planteara la necesidad de trasladar el ángulo**: los niños podrían determinar la dirección de cada segmento contando la cantidad de cuadritos horizontales y verticales necesarios para "ir" de un vértice a otro. Estamos pensando entonces en la utilización de papel liso.

Como se trata de una primera actividad en la que se juega la noción de ángulo, es claro que no podremos apelar al transportador. ¿Qué instrumento podemos ofrecer para que copien los ángulos ? Tomamos de R. Berthelot y de M . H. Salin [17] la idea de usar un "aparato" casero formado por dos tiras de cartón articuladas con un broche de dos patitas.

La propuesta es ofrecer a los niños este instrumento sin dar indicaciones respecto de su uso. Para transportar los segmentos los niños usarán regla graduada o regla y compás si ya han tenido alguna experiencia al respecto.[18]

¿Cómo se las arreglarán los chicos para copiar la figura ? Puede ser que muchos intenten usar las dos patitas para trasladar los ángulos, y vayan trasladando cada segmento y a continuación el ángulo que determina la dirección del segmento "siguiente". Es importante prever, sin embargo, que una parte de la clase copiará los ángulos "a ojo", e irá haciendo superposiciones parciales y correcciones para tener éxito en su trabajo. De todos modos, la actividad hará posible que todos los niños, en mayor o menor medida tomen conciencia de que no alcanza con medir los segmentos para realizar la tarea. El dibujo exige tener en cuenta "algo más" que las longitudes,

[16] Se trataría de una primera aproximación a la noción que debería ser completada con muchas otras actividades.
[17] Berthelot, R. y Salin, M.H. (1992). Cabe aclarar que estos autores utilizan el instrumento en una secuencia de actividades diferente de la que estamos proponiendo.
[18] En la secuencia propuesta para cuarto grado de este documento (segunda parte) se prevé la utilización de regla no graduada y compás para transportar segmentos.

aunque todavía no se pueda expresar muy claramente qué es ese “algo más”. Esto puede ser discutido brevemente en una puesta en común en la que los niños explicarán cómo hicieron para copiar la figura y cómo usaron las dos patitas articuladas.

Como el hecho de disponer del modelo no garantiza que los alumnos se vean obligados a usar algún recurso para trasladar el ángulo, estamos pensando en una segunda etapa de la secuencia en la que los alumnos tengan que copiar una figura similar sin disponer del modelo mientras la están copiando. La analizamos a continuación.

El dibujo se realiza sin tener presente el modelo

Copiar la figura sin tener el modelo presente exige a los niños anticipar cuáles son las informaciones necesarias para hacerlo y encontrar una manera de registrarlas.

Materiales necesarios:

Una copia de la figura que deben realizar cada dos grupos de trabajo. Papel liso y lápiz para cada pareja. Un par de “patitas” articuladas por alumno.
Es necesario prever un lugar (pueden ser mesitas en el frente, o un escritorio) al que los niños irán a analizar y tomar informaciones sobre la figura que luego deberán copiar.

Organización de la clase:

Los niños trabajan por parejas. Las figuras que deberán copiar están ubicadas lejos de sus pupitres. Se dispone de un dibujo cada dos grupos de trabajo. Los alumnos van hasta la mesita en la que está el dibujo que tienen asignado y registran en una hoja lisa las informaciones que consideren necesarias. Luego regresan a sus lugares y tratan de reproducir el dibujo.

Consigna:

Hoy vamos a continuar copiando figuras. Van a tener que copiar una figura parecida a la que hicieron ayer. Pero no la van a tener con ustedes en los bancos, sino que van a tener que venir a estas mesitas para observarlas, analizarlas y anotar los datos que crean necesarios para después hacerlas. La figura está formada por segmentos “inclinados”. Todos los segmentos miden 5 cm. A las mesitas pueden llevar una hoja lisa, lápiz y las patitas articuladas.

Variables del problema y análisis de la tarea :

Para que la tarea de los niños sea realmente anticipatoria es necesario evitar que copien “a ojo” la figura en las mesitas y luego realicen la reproducción en los bancos. En ese caso, la actividad no sería demasiado diferente del copiado con el modelo presente. Ese es el motivo por el cual el docente informa la longitud de los segmentos y bloquea la utilización de la regla para recoger información sobre el modelo. De esta manera, los niños tendrán que pensar una forma de registrar los ángulos y deberán centrarse en la utilización del instrumento formado por los brazos articulados.

Es importante prever que la longitud de los brazos sea menor que la de los segmentos del dibujo. Así, se inhibirá la posibilidad de que los alumnos usen como regla el instrumento pensado para transportar los ángulos.

Otra variable a considerar es la cantidad de veces que los niños podrán ir a buscar información sobre el modelo. Si se permiten muchos viajes, nuevamente estaremos en condiciones similares a las de la tarea de copiar con el modelo presente. Es preferible dar la opción de ir una única vez a buscar información, analizar luego en una puesta en común las dificultades que pudieron surgir y prever nuevas oportunidades para que los niños copien otros dibujos.

La situación de puesta en común debe servir para identificar los ángulos de los diferentes dibujos que se copiaron. Es interesante que haya tres o cuatro modelos - uno por pareja - todos formados por cuatro segmentos de la misma longitud ; esto facilitará el trabajo de identificar los ángulos como aquello que diferencia un modelo de otro.

Queremos enfatizar la importancia de pensar en secuencia las dos situaciones de copiado: la primera (reproducción con el modelo a la vista) hace posible la entrada a la escena de algunos elementos nuevos, a través de la segunda se da lugar a una identificación más consciente de dichos elementos.

El análisis que hemos realizado a propósito de estas actividades ha estado fuertemente inspirado en el que realizan R. Berthelot y M.H. Salin, también a propósito de una situación que apunta al concepto de ángulo. La situación propuesta por estos dos autores es aún más compleja en su implementación aunque, desde nuestro punto de vista, ofrece algunas ventajas respecto de la que nosotros proponemos. Por ese motivo la reproducimos a continuación y luego comentaremos los elementos que, a nuestro juicio, aporta.

FICHA DIDACTICA:

Los cuadriláteros articulados : una situación que apunta al concepto de ángulo[19]

1. *Descripción general de la situación*

Materiales

Varillas planas *de madera, de 2 cm de ancho, perforadas en sus extremidades. Estas varillas son de cuatro tamaños, siendo la distancia entre las dos perforaciones respectivamente de 12, 14, 16 y 18 cm. Dos varillas pueden ser articuladas con la ayuda de tornillos "mariposa".*
Cuadriláteros articulados*, formados por 4 varillas de tamaños diferentes, articulados en sus extremos. Todos los cuadriláteros tienen sus lados de la misma longitud ; se diferencian unos de otros por sus ángulos y, algunos de ellos, por el orden en el que se articulan las varillas. Al aflojar los tornillos, se puede modificar el ángulo que forman dos varillas y cambiar la forma del cuadrilátero.*[20]
Plantillas de cuadrilátero, *se obtienen haciendo la traza del borde interior del cuadrilátero articulado*
Instrumentos de transporte de ángulos, *formados por dos varillas de la misma longitud articuladas en uno de sus extremos por un tornillo mariposa, que permite variar el ángulo entre las dos varillas.*

---

[19] Berthelot,R. y Salin, M.H. (1992) capítulo C-7, página 260.
[20] Si los tornillos se ajustan bien, es posible lograr que los cuadriláteros se mantengan en su forma.

Problema

Cada pareja de niños tiene a su disposición un conjunto de plantillas situadas sobre una mesa y, un marco hecho de varillas, situado sobre otra mesa. Se trata de reconocer la plantilla que corresponde al marco, sin que esté permitido desplazar ni las plantillas ni el marco. Se provee a los niños de conjuntos de 4, 3 ó 2 varillas idénticas a las que constituyen el marco.

Análisis del problema y elección de variables

1- La cantidad de varillas que se disponen para la comparación. Si se dispone de 4 varillas idénticas a las que forman el marco, la solución más rápida es la de hacer un marco que se puede superponer con el inicial, llevarlo al lugar donde están las plantillas y eliminar por superposición todos aquellos que no corresponden. Cuando los niños encuentran la plantilla que se puede superponer con el marco que han construido, han concluido su tarea. Este problema no pone en juego un compromiso cognitivo por parte de los niños al nivel que nos interesa.

Si se dispone de tres varillas, la solución es la misma ya que la posición de la cuarta queda determinada por las otras tres. Si se dispone de dos varillas es imposible construir un objeto intermediario capaz de contener todas las informaciones necesarias.

La estrategia más eficaz consiste en tomar nota del orden y el sentido en el cual se articularon las varillas y construir con el par de varillas articuladas (el instrumento para transportar ángulos) un ángulo que se pueda superponer a uno de los ángulos del marco, identificando los lados que lo forman. Con esta información se pueden eliminar todas las plantillas en las que el orden en que se articulan las varillas no corresponde a las del marco y buscar, entre las que no fueron eliminadas, aquellas en las que el ángulo formado por los lados identificados se superpone con el del par de varillas. Esta solución supone conocimientos sobre cuadriláteros que normalmente no están disponibles en CM 1 [21] *y su elaboración no forma parte de nuestros objetivos.*

Notemos que la toma en cuenta del ángulo puede ser reemplazada por la longitud de la diagonal correspondiente, a condición de disponer de un instrumento adecuado.

Es probable que se utilicen procedimientos por eliminación : si existe algún ángulo del marco que no coincide con ningún ángulo de la plantilla que se examina, dicha plantilla queda eliminada. Así, los alumnos pueden buscar la plantilla cuyos ángulos coincidan con la del marco. Una vez hallada una plantilla cuyos ángulos coinciden con la del marco, la misma es candidata a solución. Pero los datos de los ángulos no son suficientes. Es necesario tomar en cuenta el orden de las varillas.

2- La cantidad de plantillas debe ser suficientemente numerosa como para que haya pocas chances de tener éxito eligiendo una plantilla al azar o con un vago recuerdo de la forma del marco, pero no excesivamente grande porque se volvería muy costosa la estrategia de ir eliminando las plantillas.

3- A través de la estrategia de eliminación sucesiva de plantillas los alumnos podrían llegar a retener dos plantillas simétricas. De esas dos, una sola sería la buscada. Si en los objetivos de la actividad estaba previsto la toma de conciencia de la existencia de dos cuadriláteros simétricos, podría ser interesante poner las plantillas correspondientes. Si no, esto complejiza la situación y es conveniente evitarlo. Por otra parte, en las estrategias por eliminación, se puede pensar que un cierto número de alumnos se contentarán con haber encontrado un ángulo de una plantilla que se puede superponer con un ángulo del marco para concluir que es la plantilla que buscaban. Para objetar esta estrategia, es necesario elegir plantillas que no puedan superponerse con el marco a pesar de tener dos ángulos que sí se puedan superponer.

4-Si el tamaño de las varillas del instrumento que transporta ángulos es igual al de dos de las varillas que forman el marco, se puede pensar que los alumnos tenderán a tomar en cuenta solamente el ángulo que corresponde a ese par de varillas e incluso se les planteará un

[21] Corresponde a nuestro cuarto grado.

problema si en el marco o en alguna plantilla esas varillas corresponden a lados opuestos. Si las dos varillas son del mismo tamaño y más grandes que la más grande de las varillas del marco, el instrumento permite no sólo marcar el ángulo sino también, marcando las varillas, determinar las longitudes de los lados del cuadrilátero correspondientes a los lados de ese ángulo. En este caso puede ser más difícil que los alumnos tomen conciencia de que el tamaño de un ángulo no depende de la longitud de los lados. Si las dos varillas son del mismo tamaño y más pequeñas que la más pequeña de las varillas del marco, el instrumento sólo puede usarse para tomar información sobre el tamaño del ángulo, independientemente del de los lados. Para lograr su objetivo, el alumno debe poner en juego una noción de ángulo en la cual la longitud de los lados no interviene.

<u>Descripción de tres clases</u>

***Clase 1**: el objetivo es que los niños se familiaricen con el material y puedan "entrar" en el problema.*

Fase 1
Los alumnos se agrupan por parejas, cada grupo dispone de 4 varillas y 4 pares de tornillos mariposa (para fabricar un marco) y una plantilla.

Consigna : El docente muestra uno de los marcos y dice :
"Un vidriero debe descomponer vidrios que se adapten a los marcos de madera que ustedes van a fabricar. Para ello ustedes disponen de varillas de la misma longitud que las de este marco y de una plantilla. Un marco estará bien fabricado si corresponde exactamente a su plantilla y si los tornillos están bien ajustados".
Después el maestro pregunta: "¿Piensan ustedes que, una vez construidos, todos los marcos serán parecidos?"
El docente pregunta si los marcos de los distintos grupos serán o no idénticos. La respuesta que los alumnos den permite interpretar si son conscientes o no de que esto depende de algo más que de las longitudes. Luego propone a los niños que realicen los marcos. Va pasando por cada grupo, y controla la calidad de las construcciones y la manera en que los alumnos articulan las varillas.
Se realiza una puesta en común en la que se comenta el trabajo. El docente hace constatar que algunos marcos no se superponen. Pide explicaciones al respecto y utiliza el término ángulo para nombrar la propiedad que diferencia un marco de otro.

Fase 2
Cada grupo dispone de un marco, diferente del primero y de un conjunto de 4 varillas (una de cada longitud) y de tornillos. Sobre una mesa común a dos grupos, suficientemente alejada, se disponen 6 plantillas correspondientes a 6 modelos de marco.

Consigna : "Ustedes tienen cada uno un marco. Deben encontrar la plantilla que le corresponde exactamente. Para ustedes (nombra dos grupos) las plantillas están allá..." El maestro enumera así los grupos y les muestra donde está su material. Luego continúa : ustedes no pueden desplazar el marco que tienen, pueden llevar los otros materiales, por ejemplo las varillas que yo les doy y una hoja de papel si tienen necesidad de escribir algo. El maestro acepta la regla sin estimular su uso ni mencionarlo.

Puesta en común: Pregunta quienes encontraron bien la plantilla e indaga acerca de las dificultades y sobre la cantidad de viajes que han hecho entre su escritorio y la mesa en las que están las plantillas. Este intercambio es muy breve.

Fase 3
Es idéntica en su desarrollo y su consigna a la fase precedente, pero el maestro distribuye sólo tres varillas para reconstruir el marco. Al final de la clase, anuncia que al día siguiente van a hacer la misma tarea pero sólo con dos varillas.

Clase 2

El objetivo es que los alumnos elaboren la noción de ángulo como herramienta para comparar las formas de dos cuadriláteros. Está constituida por dos fases, correspondientes a dos intentos para cada grupo de alumnos.

Fase 1
Cada grupo de dos alumnos dispone de un marco, de dos varillas de 10 cm, de un tornillo-mariposa, de un lápiz y de una pequeña hoja de papel. Como en la sesión precedente, se ubican 6 plantillas, identificadas por letras, comunes a dos grupos, en una mesa alejada.

Consigna : "Ayer, casi todos pudieron encontrar la plantilla de un marco, usando tres varillas. Los que no pudieron hacerlo, saben ahora por qué. Era fácil. Hoy seguiremos trabajando con los marcos y las plantillas hechas con las mismas varillas. Pero hoy el problema va a ser más difícil porque hace falta encontrar la plantilla de un marco solamente con dos varillas y un tornillo. ¡Es posible ! Como ayer, no pueden llevar el marco al lugar de las plantillas ni las plantillas al lugar del marco. Cuando piensan que han encontrado qué plantilla corresponde al marco que tienen, escriban su letra sobre el papel. Ese papel también puede usarse para escribir las informaciones que necesiten para ayudarse a descubrir la plantilla del marco que tienen. Después, todos al mismo tiempo, van a verificar si acertaron o no.

Desarrollo:

Dado que se trata de una situación nueva para los niños, puede ocurrir que algunos hayan logrado identificar la plantilla y otros no, o que nadie lo logre pero que las búsquedas estén orientadas o que los alumnos estén perdidos.
En el primer caso, el docente hará una puesta en común para que los alumnos que han logrado su objetivo expliquen los procedimientos con su material. Si el término "ángulo" puede ayudar a los alumnos a explicarse, el docente lo introducirá. Luego de la puesta en común, les dará a los chicos que encontraron su marco uno nuevo y los otros continuarán con el que tenían.
Si nadie ha logrado el objetivo aunque sí han comparado ángulos, la puesta en común versará sobre los distintos intentos, se reflexionará sobre las dificultades y cómo superarlas y se relanzará la situación.
Si todos los alumnos están perdidos se hará una fase intermedia dando a los alumnos dos varillas del mismo largo que dos varillas consecutivas del marco, a fin de propiciar un procedimiento de eliminación sucesiva de plantillas, que se apoye sobre la comparación "por trozos de marco y de plantilla".
Cuando todos los alumnos han logrado seleccionar una plantilla, se verifica y luego el maestro plantea : "hubo algunas dificultades pero muchos de ustedes ya las han superado. ¿Podrían hacer lo que aprendieron con otro marco?

Fase 2
El docente da otro marco a cada pareja, con la misma consigna. Después de la verificación, el maestro pregunta quién logró encontrar la plantilla y quién no. Muestra en el frente todas las plantillas, da un marco a un alumno y le pide que explique cómo ha hecho para encontrar la plantilla. Si no han surgido problemas para designar los ángulos, el docente puede preguntar cómo se puede estar seguro de que el ángulo que se está midiendo todavía no ha sido analizado. La cuestión dará lugar a la introducción de convenciones para nombrar los ángulos.

Clase 3

El objetivo es la discusión sobre los métodos de comparación de los cuadriláteros (¿alcanza con comparar un ángulo ?), la puesta a punto de las técnicas de comparación de ángulos y su reinversión en una tarea de construcción de un cuadrilátero que se superpone a una plantilla dada.

Fase 1
Los materiales y la organización son los mismos que en la clase anterior.

Consigna y desarrollo:
El docente recuerda lo realizado la clase anterior. Identifica el empleo de la palabra "ángulo" en lugar de los términos utilizados por los alumnos como "esquinas", "puntas", etc. Luego propone un debate sobre el método : "¿Ocuparse de un solo ángulo del marco, permite lograr el objetivo en todos los casos ? . Algunos dicen que sí, otros piensan que hace falta controlar todos los ángulos, vamos a discutir esta cuestión."
El docente hace pasar al pizarrón a un alumno que ha logrado identificar la plantilla controlando un solo ángulo. Uno de los alumnos rechaza la validez de ese método, mostrando que el marco y una plantilla podrían tener un ángulo igual sin que se puedan superponer. Es probable que en el debate aparezcan señalamientos como "yo comparé todos los ángulos y sin embargo me equivoqué". El maestro hablará del cuidado en el transporte de los ángulos, el ajuste del tornillo y las dificultades de designación.

Fase 2
El maestro propone hacer un último intento de encontrar, sin equivocarse, la plantilla correspondiente al marco. Cuando los niños han terminado, él organiza una puesta en común.

Fase 3
Material y organización:
Una plantilla, 4 varillas y un par de varillas pequeñas por grupo.

Consigna y desarrollo:
"Le entrego una plantilla a cada grupo. Allá, sobre la otra mesa, hay material necesario para hacer un marco. ¿Podrían fabricar un marco que se superponga con la plantilla que les dí? Atención : no pueden cambiar ni el marco ni la plantilla de mesa, solamente se pueden transportar las dos varillas chicas. Cuando hayan terminado, verifiquen por superposición".

Después de la verificación se hace un balance:

"¿Quién lo logró? ¿Quién no? ¿Por qué? ¿Qué informaciones han tomado? ¿Trasladaron bien los ángulos? ¿Han considerado los lados?"

<u>Breve comparación de las dos situaciones expuestas</u>

Al introducir la situación de los cuadriláteros articulados, planteamos que se trataba de una situación de implementación más compleja, fundamentalmente porque la realización del material es más costosa. Decíamos sin embargo que, desde nuestro punto de vista, ofrece algunas ventajas respecto de la secuencia de copiado que expusimos. ¿Cuáles son esas ventajas?

En la situación de copiado con el modelo a distancia, nos hemos preocupado por bloquear el "copiado a ojo" al lado del modelo, para asegurar que la situación requiera mayor anticipación que en el copiado con el modelo presente. Para ello permitimos solo el uso de los brazos articulados como instrumento para buscar la información. Bloquear el uso de la regla nos obligó a brindar nosotros la información sobre la longitud de los lados. Esto tiene algunos inconvenientes: por un lado resulta difícil para los niños retener esta información, por otro lado, en la figura intervienen longitudes y ángulos y es un poco artificial bloquear la búsqueda de las longitudes. En la situación de los cuadriláteros, en cambio, la información respecto de las longitudes está más presente a través de la materialización de las varillas. De entrada se sabe que todos los cuadriláteros tienen los lados iguales y esto mismo permite discutir que existen cuadriláteros diferentes con sus lados iguales. Justamente los ángulos se nombran por primera vez como “aquello que hace que los distintos cuadriláteros resulten distintos”.

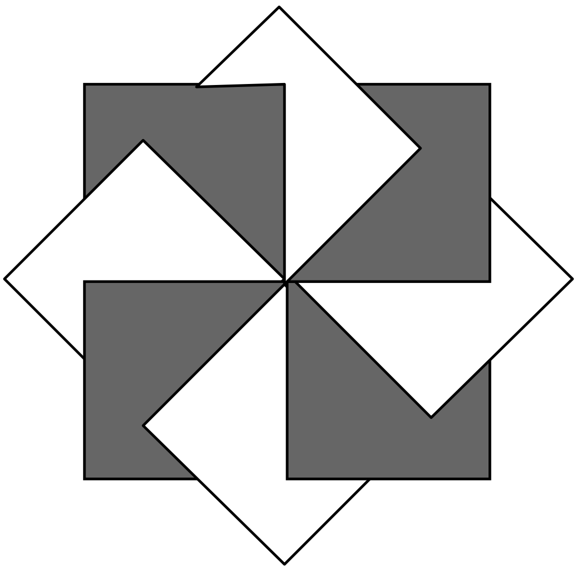
El análisis anterior nos lleva a hacer una reflexión: las distintas opciones didácticas tienen en general ventajas y desventajas y para optar por una u otra alternativa es necesario considerar el conjunto de condiciones de cada clase particular.

La situación de copiado de figuras que hemos analizado apuntaba a poner en la escena un objeto con el que no se había trabajado anteriormente: el ángulo.
En algunas ocasiones, la actividad de copiado podría resultar interesante para identificar con los niños nuevas estrategias útiles para las construcciones, como por ejemplo el trazado de rectas auxiliares.

Analizaremos ahora un ejemplo en este sentido e introduciremos una nueva variante : la figura a reproducir debe realizarse a una escala diferente de la del modelo.

Copiar figuras a distinta escala

Consideremos la siguiente consigna: “Analicen el siguiente dibujo. Ustedes deben reproducirlo, pero en un tamaño mayor, usando la escuadra no graduada y el compás.



Para poder realizar la construcción es necesario establecer que se trata de dos cuadrados iguales, uno rotado respecto del otro. Introducir elementos auxiliares que no forman parte del dibujo a reproducir pero que son necesarios para la construcción, es una estrategia - eficaz en este caso - que los niños deben aprender y para la cual el dibujo anterior resulta interesante.

Una estrategia posible es trazar un cuadrado, luego trazar sus diagonales para determinar el centro, por el centro trazar las perpendiculares a los lados, trasladar sobre las diagonales con el compás y a partir del centro una longitud igual a la mitad de la longitud del lado, trazar las perpendiculares a las diagonales que pasan por los puntos así determinados.

Notemos que al no estar permitida la regla graduada, las bases medias no pueden trazarse en primer lugar ya que no se puede medir para determinar los puntos medios de los lados. Es necesario entonces trazar las diagonales, determinar el centro y trazar las bases medias con la escuadra usando el hecho de que son perpendiculares a los lados que pasan por el centro. El ejemplo permite analizar cómo pueden ir variando los conocimientos que es necesario invertir para realizar la tarea en función de los útiles geométricos que se disponen.

¿Cuál es el aporte que introduce la reproducción del dibujo a una escala diferente?

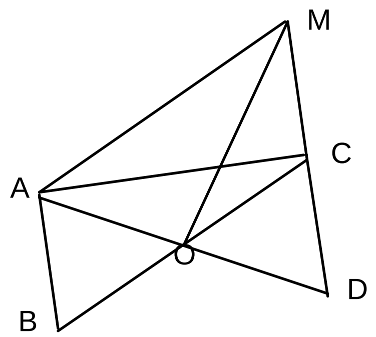
Por una parte, no es posible realizar el dibujo copiando tramo por tramo, es necesario reproducir las relaciones del modelo original. Analicemos, por ejemplo, que si se tratara de una copia al mismo tamaño, los niños podrían realizar la figura sin establecer que se trata de dos cuadrados iguales, o sin llegar a darse cuenta de que el lado del cuadrado “inclinado” es igual al del “derecho”.

Por otra parte, en el caso de reproducciones a la misma escala, los niños comprueban su construcción superponiendo el modelo con su dibujo. En esta nueva instancia de reproducción a una escala diferente, esa superposición ya no es posible y **validar el trabajo significará mostrar que las mismas relaciones del dibujo original se conservan en la reproducción**.

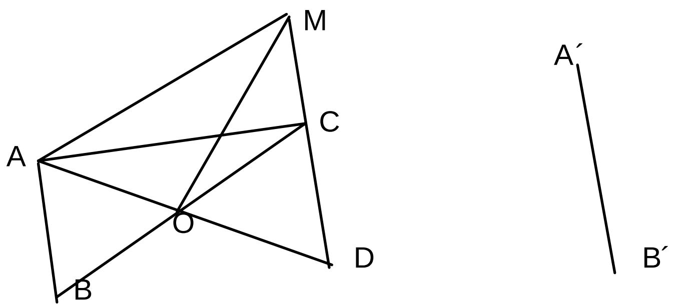
Reproducir el dibujo a la misma escala, pero comenzando por algún elemento ya trazado en la nueva copia en una posición diferente de la del modelo, es una variante que - si bien puede ser validada por superposición - exige en el momento de la construcción un análisis más profundo del modelo. Dejamos a cargo del lector la consideración del siguiente ejemplo:

Consigna :

“El siguiente dibujo está compuesto por triángulos equiláteros y rectángulos. Ustedes tienen que reproducirlo a partir del segmento trazado, de manera que la copia pueda superponerse con el original”.



Si se pidiera ampliar el dibujo a partir de un segmento trazado en una posición diferente de la del modelo



la tarea resultaría mucho más compleja ya que exigiría establecer, por ejemplo, que los triángulos ABO y CDO son equiláteros, que AOM es rectángulo y que ADM es equilátero.

En síntesis, el análisis realizado de la tarea de reproducción de figuras nos lleva a identificar que son variables de las situaciones: [22]

- la presencia o no del modelo a la vista del niño mientras realiza la tarea
- los instrumentos de trazado que se habilitan (regla graduada, regla no graduada, etc)
- el tipo de papel que se utiliza (liso, cuadriculado, etc)
- el tamaño al que se debe hacer la reproducción (a la misma escala o a escala diferente)
- la posición de la copia respecto del modelo

3.3 Pedir datos para reproducir una figura

Ubicados en el proyecto de propiciar la interacción entre las representaciones gráficas de las figuras (los dibujos) y las relaciones que las caracterizan como una manera de promover el avance en las conceptualizaciones de los niños, proponemos a continuación otro modo de gestionar las construcciones: la reproducción de una figura que los niños no ven, a partir de datos sobre la misma que ellos solicitan.

Descripción de la actividad

El maestro informa a los alumnos que tiene en su escritorio una figura de cierto tipo, acerca de la cual los niños conocen el nombre y algunas de sus características. (Pueden ser triángulos, cuadriláteros en general, trapecios, paralelogramos, etc). Los niños - que no ven la figura, sólo saben que es de una cierta clase - deben solicitarle al docente algunos datos sobre la figura para poder reproducirla de manera que se superponga con la del maestro. La clase puede organizarse en pequeños grupos, los integrantes de un mismo grupo deben ponerse de acuerdo respecto de los datos que solicitarán y pedirlos por escrito. El docente les responde también por escrito y no emite ningún juicio respecto de los datos que los niños solicitan. Recién cuando los

[22] El concepto de variables didácticas de las situaciones ha sido definido en el punto 3.

alumnos consideran que han concluido el dibujo se verifica si se superpone con el del maestro y se discuten los posibles errores.

¿Cuántos datos pueden solicitar los niños? Esta es una variable que se irá modificando a medida que la situación evolucione. Efectivamente, si se piensa por ejemplo en una secuencia que apunte al estudio de paralelogramos, pueden no plantearse restricciones para las primeras construcciones pero la cantidad de datos permitidos puede ir reduciéndose a medida que se avanza en conceptualización. Un objetivo de la actividad es ir seleccionando ternas de datos que hagan posible la construcción así como ir estableciendo cuáles elementos dependen entre sí. Por ejemplo, en una primera instancia los niños - en relación con los paralelogramos - podrían solicitar los cuatro lados y los cuatro ángulos; el producto de la actividad, tal vez en una situación de debate, debería permitir que se establezca en la clase que los ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suplementarios, con lo cual, al conocer un ángulo de un paralelogramo se conocen todos los demás.

Para provocar que los alumnos avancen en la identificación de grupos de datos necesarios y suficientes para construir la figura en cuestión, será interesante exigir en el curso de una secuencia que en cada nueva instancia los niños varíen por lo menos uno de los datos solicitados.

Tomar la decisión acerca de los datos a pedir supone por parte de los niños no sólo el trabajo de identificación de ciertas relaciones sino la anticipación de algún procedimiento posible para lograr la construcción. En otras palabras, los niños se atreverán con un cierto grupo de datos sólo si tienen alguna idea de cómo los utilizarán. Esto les exige hacer un análisis sobre una figura cualquiera que han producido (quizás como bosquejo para poder hablar entre ellos) cuyas medidas no coinciden - el niño lo sabe - con las del docente. (*"Si pedimos este dato, y este dato - dicen los niños señalando un segmento cuya medida es diferente de la que deben hacer - podemos trazar este triángulo y luego completar el paralelogramo*").

Aceptar este modo de proceder supone un avance importante en la posibilidad de generalizar las relaciones que se establecen a propósito de las figuras: se proponen enunciados en relación con un dibujo que no respeta exactamente el contenido de dichos enunciados. Este es el aporte central de esta actividad respecto del dictado y del copiado.

Dicho de otro modo: al dictar o copiar los niños ven el modelo, al pedir datos se manejan con la representación interna que ellos tienen de la figura con la que trabajan y el modelo sobre el que razonan es producido por ellos sin que se superponga con el que deben construir.

3.4 Construir la figura a partir de ciertos datos

Nos referiremos ahora a los clásicos problemas de construcción en geometría: "*Construir un triángulo conociendo los tres lados, construir un triángulo conociendo dos lados y la mediana correspondiente a uno de ellos, construir un rombo conociendo un lado y una diagonal"*.

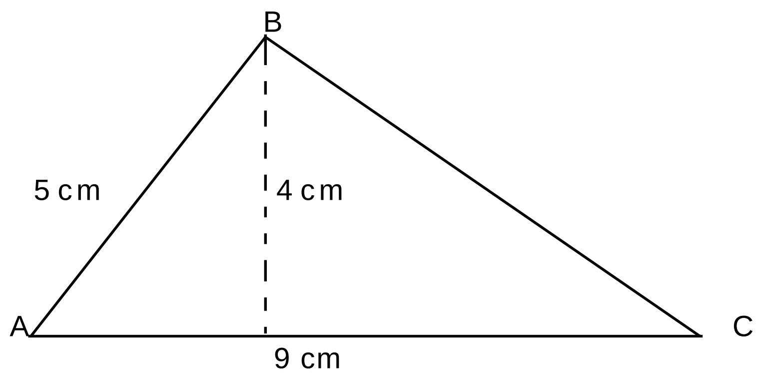
Todas las situaciones que hemos analizado hasta aquí - dictado, copiado, pedido de datos - se refieren a una figura que ya está construida y que los alumnos deben reproducir. Por esa razón, ninguna de esas situaciones permite poner en juego una cuestión importante : la compatibilidad de los datos para construir la figura. ¿Qué significa esto ?

Supongamos, por ejemplo, que el problema fuera construir un triángulo cuyos lados miden, respectivamente, 4 cm, 5 cm y 12 cm. Como el lector sabe, este triángulo no existe ya que no cumple la condición de que cada lado sea menor que la suma de los otros dos. Plantear un problema de este tipo permite discutir en la clase las condiciones de posibilidad para realizar la construcción.[23]

Analicemos otro ejemplo:

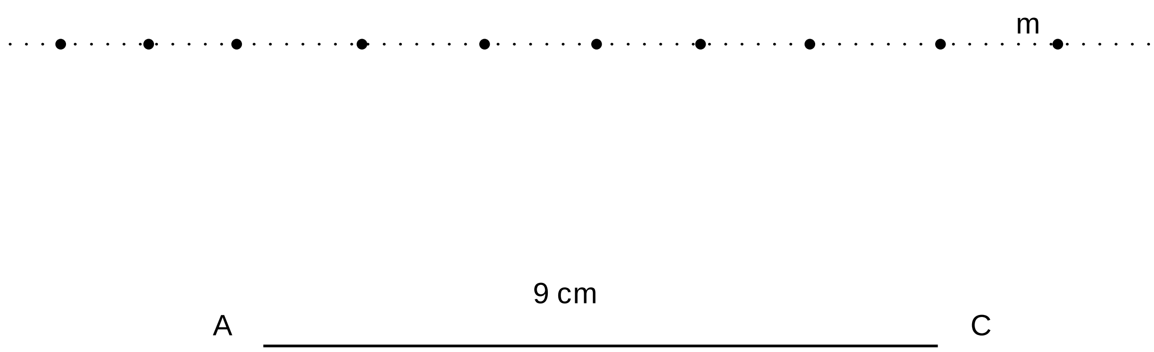
Construir un triángulo ABC en al que AC es de 9 cm, la altura perpendicular a AC es de 4 cm y el lado AB es de 5 cm.

Para tener una representación de la situación es útil –casi imprescindible- hacer una figura de análisis.



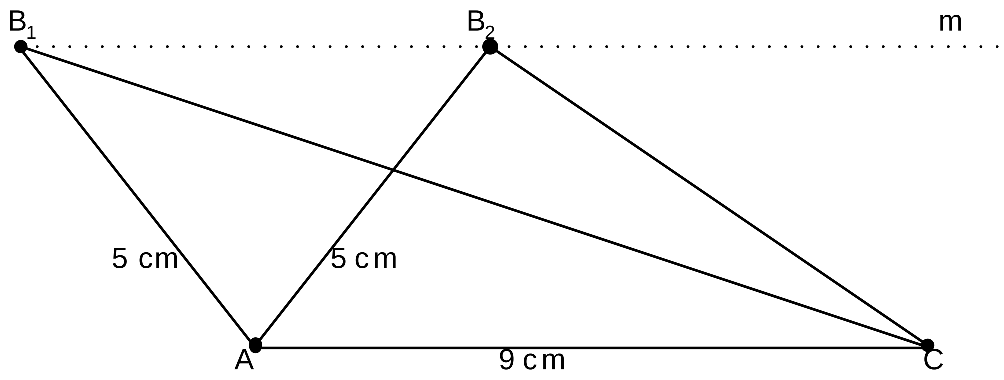
Notemos que la figura es un esquema y cumple la función de hacer observables las relaciones necesarias para resolver el problema, pero no "porta" en realidad los datos de la figura a construir. Este tratamiento es difícil para los niños y puede pensarse que arribarán al mismo luego de una larga experiencia con construcciones.

El análisis de la figura nos lleva a establecer que podemos trazar el lado AC y a 4 cm una recta m paralela al mismo. Sobre esta recta estará el tercer vértice del triángulo dado que cualquier punto de la misma está a una distancia AC igual a la altura.

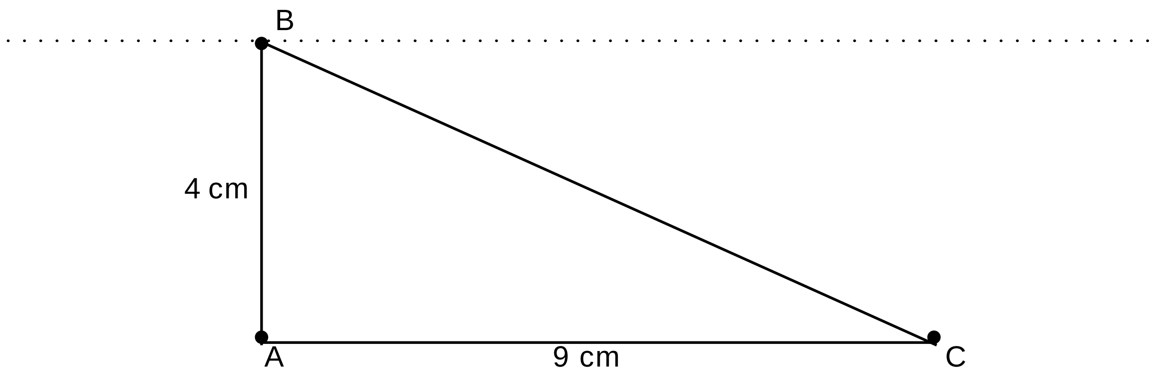


Al tener la medida de AB, podemos usar el compás para determinar todos los puntos que se encuentran a 5 cm de A.

[23] Remitimos a la actividad 3 de la cuarta parte de la secuencia de 4º.



El vértice B se encuentra en la circunferencia y en la recta m. Pero al ser la distancia de m a AC menor que AB, la recta y la circunferencia se cortan en dos puntos: B_1 y B_2. Los triángulos AB_1C y AB_2C son diferentes y ambos cumplen con las condiciones del problema inicial. En otras palabras, el problema tiene dos soluciones. ¿En qué caso la solución hubiese sido única? Si AB hubiera sido igual a la altura, habríamos obtenido un único triángulo rectángulo.



Si en cambio AB hubiera sido menor que la altura, la circunferencia de centro A y radio AB no habría cortado a la recta y el problema no habría tenido solución.

Vemos entonces que un problema de construcción a partir de un conjunto de datos, además de introducir la cuestión de la compatibilidad de los datos, da lugar al análisis de la cantidad de soluciones. Este aspecto no puede considerarse cuando se trata de reproducir un modelo que está materializado de antemano.

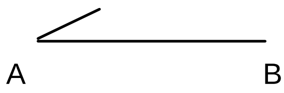
¿Es el problema anterior pertinente para el segundo ciclo? Probablemente no. Sabemos que es un problema difícil para los niños. Pero también sabemos que las nociones de fácil o difícil son relativas a las experiencias que los alumnos puedan tener. Queda claro que para que en algún momento los alumnos puedan abordar problemas de este tipo, es imprescindible que el trabajo geométrico se vea nutrido de problemas cada vez más desafiantes,

¿Por qué hemos incluido el análisis de este problema si, en principio, no lo estamos considerando para el segundo ciclo? Nos parecía interesante abarcar en la reflexión no sólo los aspectos que se ponen en juego en el ciclo, sino también aquellas cuestiones para las cuales -por su relevancia en relación con las prácticas geométricas- debemos preparar a nuestros alumnos.

Algunos de estos problemas - los más clásicos - están presentes en la mayoría de los libros de texto. Sin embargo - en general - se propone el problema e inmediatamente después se “muestra” el procedimiento para realizar la construcción. La actividad del alumno queda reducida a seguir un conjunto de instrucciones ajenas a su elaboración. Bajo esas condiciones las construcciones no aportan nada significativo a la conceptualización de las propiedades, en el sentido en que venimos desarrollando esta problemática en este documento.

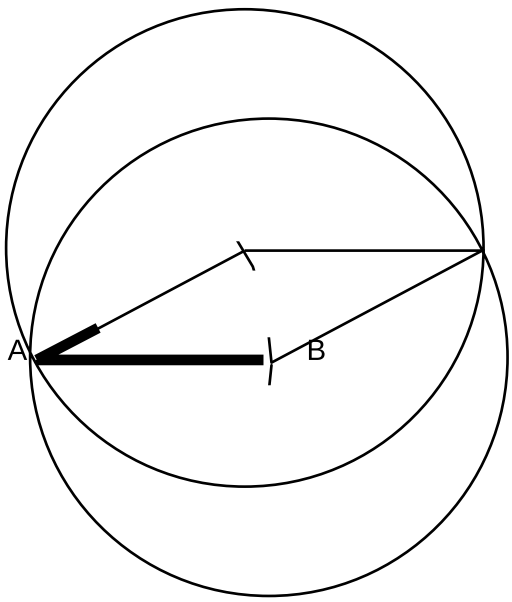
La actividad de completar una figura a partir de ciertos elementos puede resultar una situación "intermedia" entre las construcciones a partir de datos y las actividades descriptas anteriormente. Analicemos el siguiente ejemplo [24]

"Completar el siguiente dibujo para que resulte un rombo de lado AB"



La tarea consiste en realizar un rombo acerca del cual se conoce la medida del lado y uno de los ángulos. Para lograrlo, los niños podrán

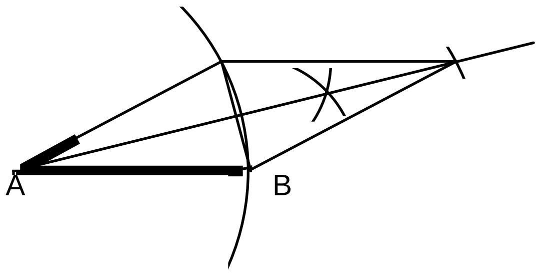
- usar el compás y, apoyados en que los cuatro lados son iguales, realizar la siguiente construcción



[24] En la secuencia para quinto grado que se incluye en la segunda parte de este documento, proponemos la construcción de rectángulos, dada la diagonal.

o bien

- apoyarse en que las diagonales son bisectrices de los ángulos para trazar la recta correspondiente a la diagonal cuyo vértice coincide con el vértice del ángulo



Observemos que cualquiera sea el procedimiento elegido, es necesario movilizar las propiedades del rombo para realizar la construcción.

En el marco de la actividad de completar figuras, puede resultar interesante comparar diferentes construcciones. Por ejemplo, la tarea de completar un cuadrado y un rectángulo a partir de su diagonal, constituirá una oportunidad de discutir con los niños las razones por las cuales se obtiene un único cuadrado en tanto pueden construirse infinitos rectángulos. La argumentación a trabajar con los niños puede ser aproximadamente la siguiente: un cuadrilátero cuyas diagonales son iguales y se cortan en el punto medio de cada una de ellas, resulta un rectángulo; haciendo variar el ángulo que forman entre sí las diagonales se obtienen diferentes rectángulos, todos con la misma medida de la diagonal; el cuadrado es el caso en el que el ángulo entre las diagonales es recto. La discusión puede contribuir a que los niños “acepten” al cuadrado como un rectángulo particular, cuyas diagonales son perpendiculares.

Decíamos recién que completar una figura es una actividad intermedia entre las construcciones a partir de datos y las situaciones de dictado, copiado o pedido de información. ¿Por qué intermedia? En tanto no se parte de un modelo materializado, la tarea tiene las características de las construcciones a partir de datos, pero, en la medida en que se muestra cómo se relacionan entre sí los datos que se dan, la actividad resulta más sencilla que las construcciones en las que los datos aparecen “sueltos” (como en los dos primeros ejemplos).

3.5 Breve síntesis acerca de las diferentes modalidades de implementar el trabajo de construcciones

Hemos discutido en este punto el papel de las construcciones como medio para que los alumnos pongan en juego y conceptualicen las propiedades de las figuras. Cada una de las modalidades propuestas aporta, desde el punto de vista didáctico, algún aspecto particular que las otras modalidades no permiten considerar. Así, la reproducción de figuras supone por parte del chico la búsqueda de elementos y relaciones pertinentes para caracterizarlas, pero estas relaciones permanecen implícitas. La explicitación de las relaciones y las elaboraciones que surgen al tener en cuenta las exigencias de la comunicación, son aportes de la actividad de dictado. El pedido de datos, al inhibir la posibilidad de acceso al modelo previo a la construcción, pone al alumno, por primera vez, en contacto con la necesidad de concebir una figura genérica. Finalmente, las construcciones a partir de ciertos datos, ofrecen la posibilidad de discutir con los niños el problema de la constructibilidad de una figura y el de la cantidad de soluciones.

Como hemos dicho, no estamos pensando en que estas actividades deban realizarse según un orden preestablecido. Pensamos más bien, que cada secuencia debe incluir diferentes modalidades pues cada una de ellas supone una manera particular de desplegar el conocimiento matemático y todas, en conjunto, harán posible que el niño construya una representación interna de la práctica geométrica que capture rasgos esenciales de esta actividad.

4. Problemas de geometría que no implican construcciones

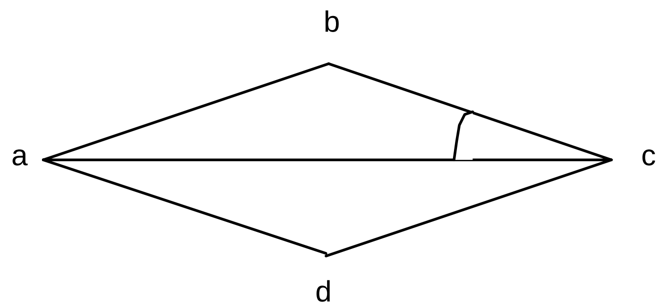
Hemos dedicado una parte importante de este documento a analizar didácticamente el papel de las construcciones en la enseñanza de la geometría en el segundo ciclo de la escuela elemental. Hemos concebido las construcciones como un medio de enseñanza, en tanto las mismas pueden constituirse en problemas para los cuales es preciso que los alumnos elaboren y pongan en juego conocimientos geométricos. Ubicamos esta perspectiva -ya lo hemos señalado en otros documentos- en una concepción de enseñanza de la matemática según la cual los niños aprenden a través de la resolución de problemas que les exijan tanto usar sus conocimientos como elaborar nuevos. Resulta entonces pertinente señalar que existen otros problemas, además de las construcciones, que pueden colaborar con ese objetivo. No haremos en este documento un desarrollo detallado de este tipo de problemas. Pero ofrecemos algunos ejemplos que nos permiten esbozar el tipo de práctica en la que estamos pensando.

Ejemplo 1

Analicemos en primer lugar la siguiente situación:

Objetivo: Poner en juego propiedades del rombo, en particular la que señala que la suma de los ángulos interiores es 360º

Organización de la clase:
El docente pega un afiche en el pizarrón con el siguiente dibujo y la información correspondiente sobre el mismo:



El cuadrilátero abcd es un rombo.
El ángulo bca mide 25º

Calcular la medida del ángulo d

Esta actividad tiene por objetivo que los niños recurran a algunas de las propiedades del rombo para determinar la medida del ángulo d, por eso no se permite apelar al transportador.

Un camino posible sería pensar que, al tener los cuatro lados iguales, los triángulos abc y acd son isósceles y congruentes. En consecuencia, el ángulo bac también debe medir 25º. Y, como la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180º, el ángulo b debe medir 130º.

Por consiguiente, el ángulo d también mide 130º

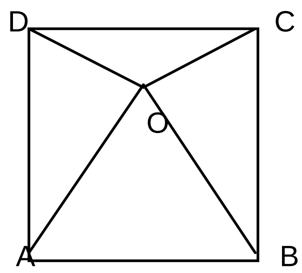
Otra posibilidad sería pensar en que los ángulos a y c miden 50º cada uno, en consecuencia, la suma de los ángulos b y d debe ser 260º. Por lo tanto, al ser ambos iguales, el ángulo d debe medir 130º.

En este problema, los alumnos deben apelar a relaciones que se verifican en el rombo y, a partir de estas relaciones, anticipar la medida del ángulo sin recurrir a la experiencia de medirlo. Este punto tiene además una notoria ventaja sobre el hecho de medir: si cambia el rombo muy probablemente cambien las medidas de los ángulos, pero las relaciones que se establecen son independientes de las medidas, por lo tanto, pueden volver a recurrir a ellas.

<u>Ejemplo 2</u>

Analicemos ahora la siguiente actividad, que tiene características similares al ejemplo 1:

El docente pega en el pizarrón un afiche en el que aparece el siguiente dibujo y la correspondiente información sobre el mismo:



ABCD es un cuadrado. OAB es un triángulo equilátero.

Consigna 1: En esta figura es posible determinar las medidas de varios de los ángulos que allí aparecen, sin necesidad de recurrir al transportador. ¿Podrían decir de cuáles?

La actividad apunta nuevamente a poner en juego una cuestión que es esencial en la práctica geométrica (y más en general, en matemática en su conjunto): el hecho de conocer algunas relaciones, nos provee información sobre la figura con la que estamos trabajando sin necesidad de medir.

No todos los niños encontrarán las mismas relaciones. Podemos pensar que todos reconocerán los ángulos rectos del cuadrado y que parte de la clase podrá establecer que los ángulos del triángulo equilátero miden 60º.

Tal vez algunos niños puedan establecer también que los ángulos DAO y CBO miden 30º, restando del ángulo recto, los 60º correspondientes a los ángulos del triángulo equilátero.

Luego de una fase de resolución individual el docente promueve una discusión en la que se comentan y analizan las diferentes relaciones y respuestas obtenidas.

Luego del trabajo sobre el problema el docente plantea la segunda consigna:

Consigna 2: ¿Podrían encontrar una manera de saber la medida del ángulo DOC sin venir a medirlo?

El problema es complejo. ¿Cómo aprovechar las relaciones ya establecidas para resolverlo?. Es necesario que los niños se den cuenta, además, de que el triángulo DOA es isósceles pues AO = AD (como AOB es equilátero, AO = AB y AB = AD por ser ABCD un cuadrado, luego AO = AD) . De la misma manera se ve que BOC es isósceles. Entonces, los ángulos de sus bases miden 75º cada uno pues dichos ángulos deben ser iguales y sumar 150º (que con los 30º ya determinados suman 180º) . Obtenida esta relación, es más fácil establecer que DOC mide 150º.

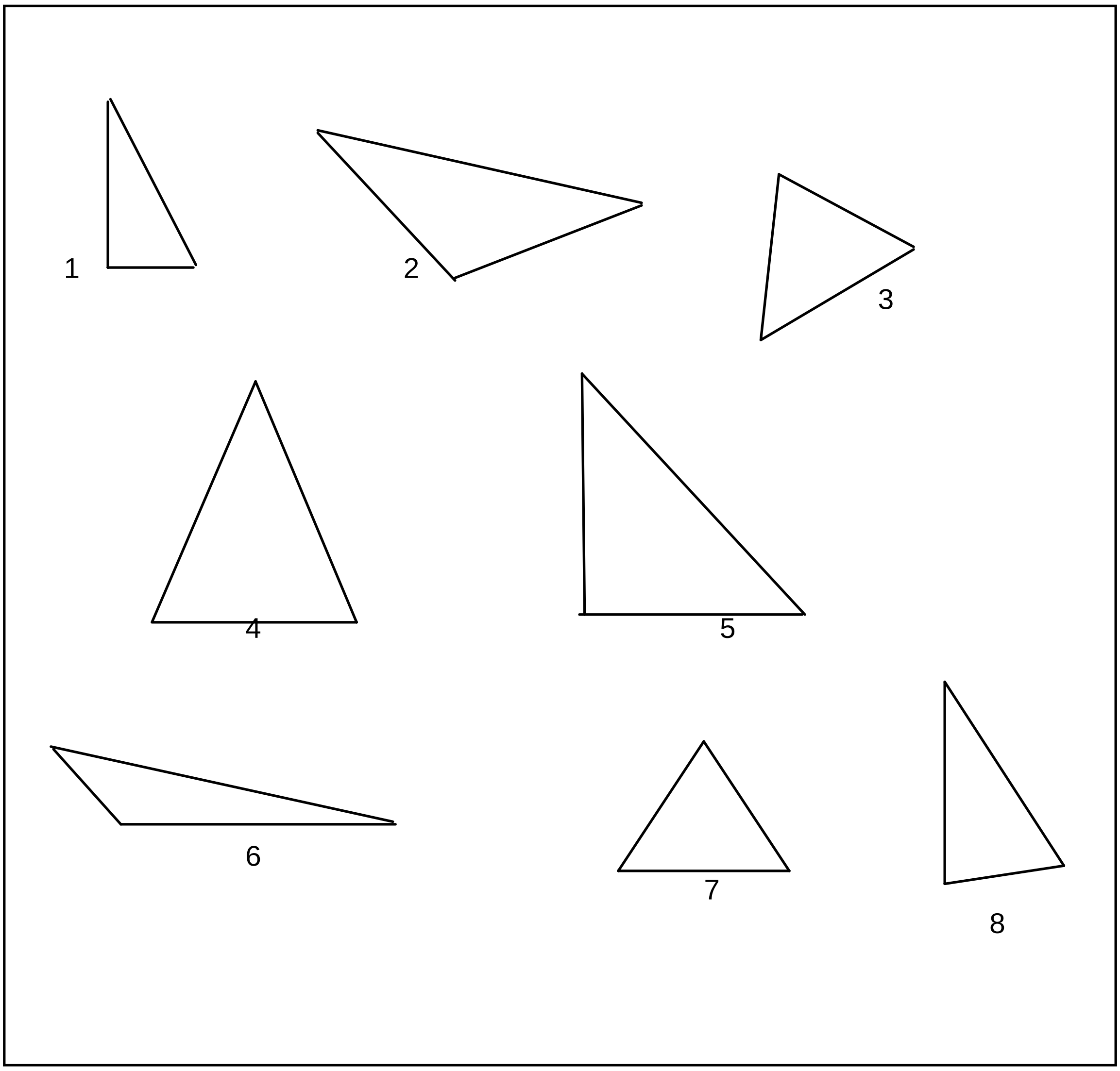
La complejidad del problema radica en la necesidad de establecer relaciones independientemente de cualquier medida. Esta es justamente una cuestión que deberá discutirse en la puesta en común.

A través de la primera consigna pretendemos explicitar la posibilidad que brindan las relaciones geométricas para conocer ciertas medidas en las figuras sin necesidad de recurrir a los instrumentos de medición. La segunda consigna busca poner de relieve la necesidad de encontrar nuevas relaciones que permitan obtener más informaciones.

<u>Ejemplo 3</u>

Analicemos ahora la siguiente actividad:

Organización de la clase: cada equipo tiene una hoja en la cual se encuentran dibujados varios triángulos diferentes:



El docente elige uno de todos esos triángulos sin que los alumnos sepan de cuál se trata.

Consigna: "Yo elegí una figura. Cada grupo a su turno deberá realizar una pregunta que se responda por sí o por no, de manera tal de poder adivinar cuál es. Si algún equipo arriesga y adivina gana. Pero si arriesga y no adivina deja de jugar. Deberán discutir en cada grupo cuál es la pregunta más conveniente a realizar."

Esta actividad tiene por objetivo que los niños establezcan algunas relaciones a partir de los lados o los ángulos de los triángulos que aparecen en la hoja.

Varias de las preguntas que los niños realicen servirán como punto de partida hacia un posterior análisis en torno a las características que pueden determinar una clasificación: por ejemplo "¿Tiene los tres lados iguales?" . Esta pregunta implica la identificación de varios triángulos a los cuales les "ocurre lo mismo".

Por otro lado, detectado el hecho de que hay grupos de varios triángulos que tienen alguna característica en común, se pone en juego la necesidad de controlar la información que se va obteniendo no solo de la pregunta que formula el equipo, si no también de las preguntas que elaboran los otros. En consecuencia, cada equipo deberá analizar cuáles son los triángulos posibles a partir de las respuestas que va dando el docente, descartando (o tachando) aquellos que no cumplan con la condición.

Muchas veces los alumnos preguntan dos veces lo mismo, sin percatarse que se trata de la misma pregunta, por ejemplo: "¿Tiene dos lados iguales?" . Si el docente responde que no, es posible que otro grupo pregunte si tiene los tres lados iguales. Esto muestra una parte de la complejidad que implican las clasificaciones: los triángulos equiláteros también son isósceles.

En el universo presentado, por ejemplo, el triángulo número 5 puede formar parte de los triángulos rectángulos, pero a su vez ser parte de los triángulos isósceles.

En una puesta en común se podrá identificar cuáles son los grupos de triángulos que tienen alguna característica en común como así también incorporar el nombre de este tipo de triángulos.

En este tipo de actividades son los alumnos mismos quienes, a través de las preguntas que elaboran y del tratamiento de las informaciones que reciben, esbozan criterios de clasificación, los ponen a prueba, los reformulan.

Es decir la actividad de clasificación está a cargo de los alumnos. Sin embargo queremos subrayar que para desencadenar tal actividad el docente debe producir, seleccionar un universo (en este caso figuras geométricas) en función del tipo de relaciones que busca que sus alumnos establezcan.

Las herramientas disponibles para el maestro son fundamentalmente la elección del universo sobre el que se va a trabajar y la organización de la actividad en la clase. Se busca precisamente, como en el ejemplo 3 ya analizado, que las clasificaciones sean un producto del trabajo y no el punto de partida (en el sentido de algo dado que hay que memorizar)

El arribo a ciertas clasificaciones implica también resolver problemas en los cuales se "vean" los casos particulares como pequeñas transformaciones o modificaciones de los casos generales, por ejemplo:

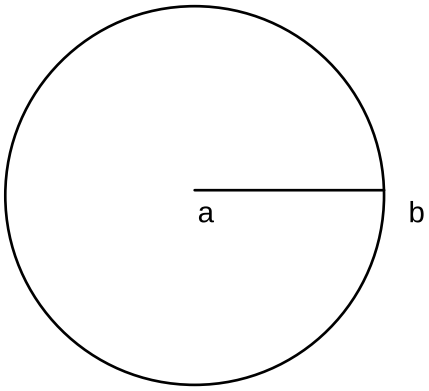
Construir un rombo sabiendo que el lado mide lo mismo que la longitud de este segmento:

a b

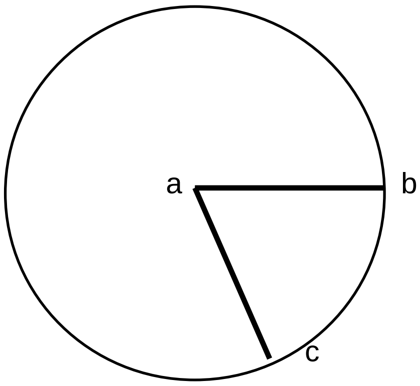
Si trazamos el segmento dado

a b

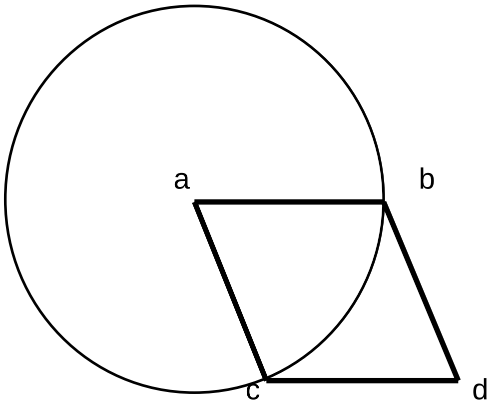
sobre el punto a se apoya el compás y, considerando como radio el segmento conocido, se traza la circunferencia de centro a :



Si a continuación se elige un punto cualquiera de la circunferencia, dicho punto será el vértice c del rombo a construir, quedando de esta manera determinado el lado ac:

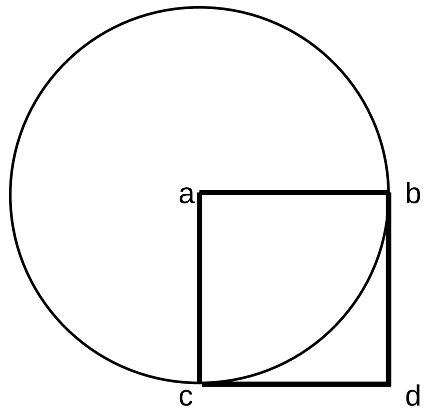


Finalmente, se traslada el lado ac de forma paralela hasta que pase por b. Análogamente, se traslada de manera paralela el lado ab hasta que pase por c:



De esta manera se obtiene un rombo, de los infinitos posibles de construir.

Ahora bien, si el punto elegido en la circunferencia hubiese sido aquel que determina un radio perpendicular al ab:



se obtiene un cuadrado, como caso particular, dentro de todos los rombos posibles.

Esta situación muestra una parte de la dificultad de las inclusiones: de todos los rombos de lado conocido, alguno será un cuadrado.

<u>Ejemplo 4</u>

Este ejemplo está pensado para finales del segundo ciclo.

Objetivo: La actividad apunta a que los niños profundicen algunas relaciones sobre circunferencia y círculo y reconozcan que el radio del círculo es un elemento presente en el semicírculo que permite identificarlo. A través de este problema los niños aprenderán que en un semicírculo las longitudes de los segmentos que tienen un extremo en el punto medio de la base y el otro en un punto del arco son todas iguales al radio. Eso no ocurre en los segmentos circulares que no son semicírculos.

Consigna: Cada equipo tiene un semicírculo. Su tarea es ir a buscar al lugar que voy a indicarles la otra mitad del círculo. Van a tener que encontrarlo entre un conjunto de partes de círculo y como no pueden llevar el semicírculo que tienen, discutan antes de ir cuáles son las informaciones que necesitan para poder elegir la pieza que corresponda.

Organización de la clase: cada grupo tiene un semicírculo recortado y reglas. Los diámetros son, para cada grupo, de 10 cm, 14 cm, 15 cm, 18 cm. Se colocan adelante del aula cuatro mesitas o sillas, una para cada grupo, en las que habrá diferentes segmentos circulares[25], algunos de los cuales son semicírculos. Para cada grupo se colocarán:

** segmentos circulares que no son semicírculos, cuyas cuerdas base son iguales al diámetro del semicírculo que tienen los niños.*

[25] Dados dos puntos A y B de una circunferencia, se denomina segmento circular a cualquiera de las dos partes en que la cuerda AB divide al círculo. Si la cuerda AB es un diámetro, las dos partes serán semicírculos.

** segmentos circulares de los círculos dados, pero que no son semicírculos*

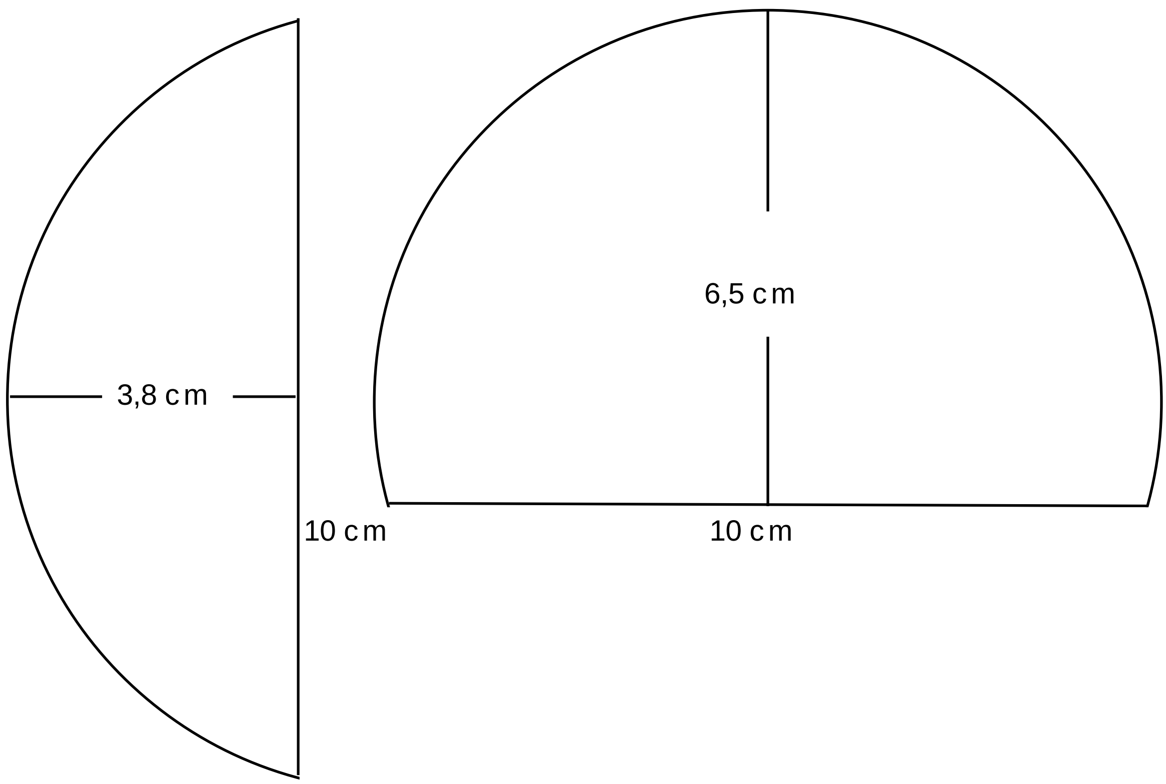
** segmentos circulares que no sean semicírculos y en los que la medida de la perpendicular a la cuerda base sea el radio del semicírculo que tienen los niños*

** semicírculos con radios próximos al que los niños tienen*

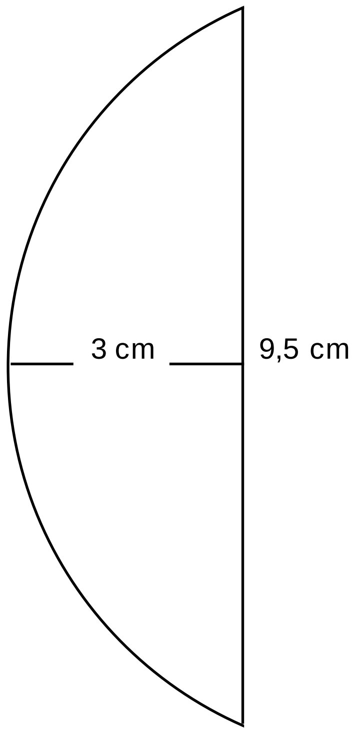
** un semicírculo como el que los niños tienen*

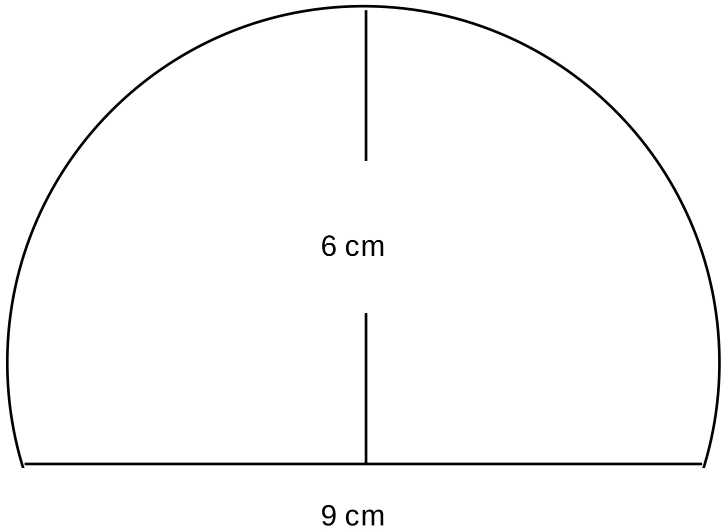
A modo de ejemplo, presentamos aquí un juego para uno de los grupos:

Si un grupo recibe un semicírculo cuyo diámetro mide 10 cm, en la mesa que tengan enfrente deberá haber:
- segmentos circulares que no son semicírculos, cuyas cuerdas base midan 10 cm:

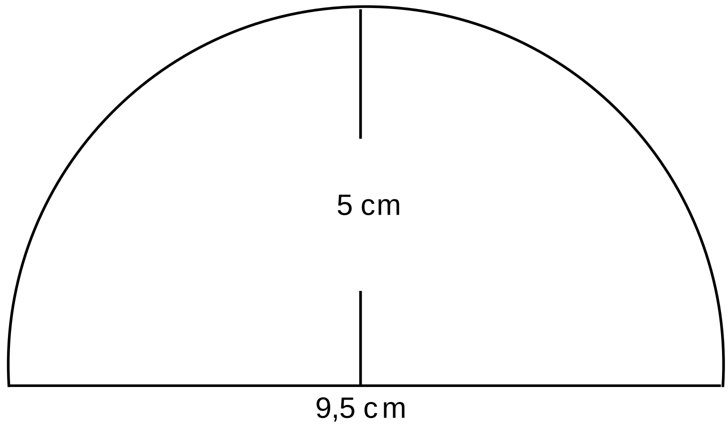


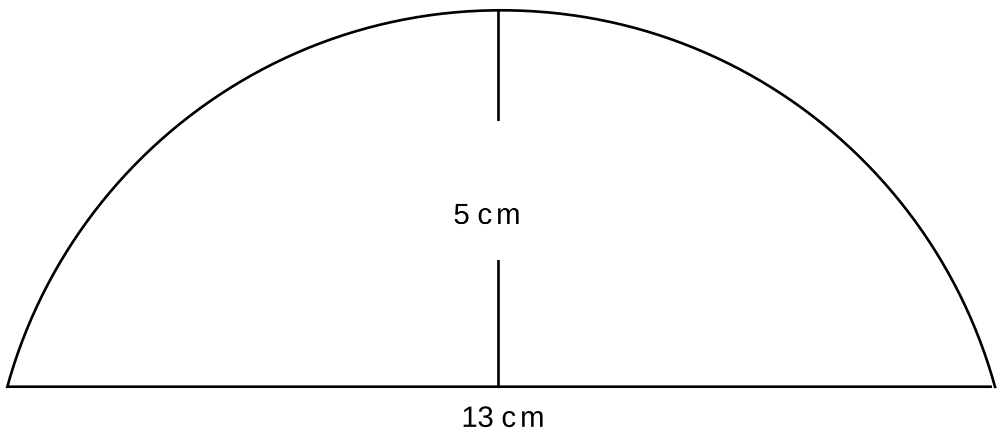
-segmentos circulares de los círculos dados pero que no son semicírculos (la cuerda base debe medir algún valor diferente de 10 cm):



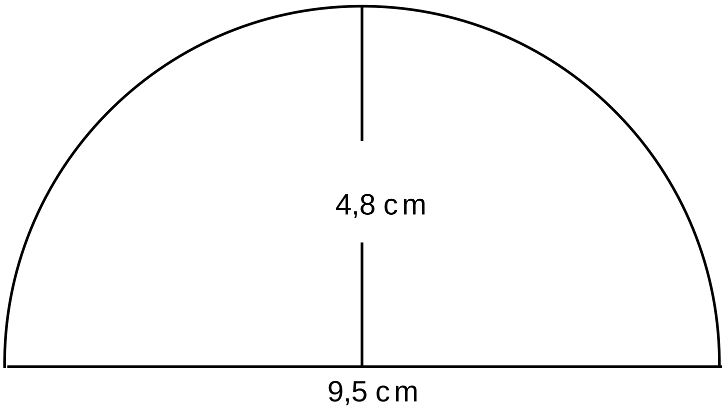


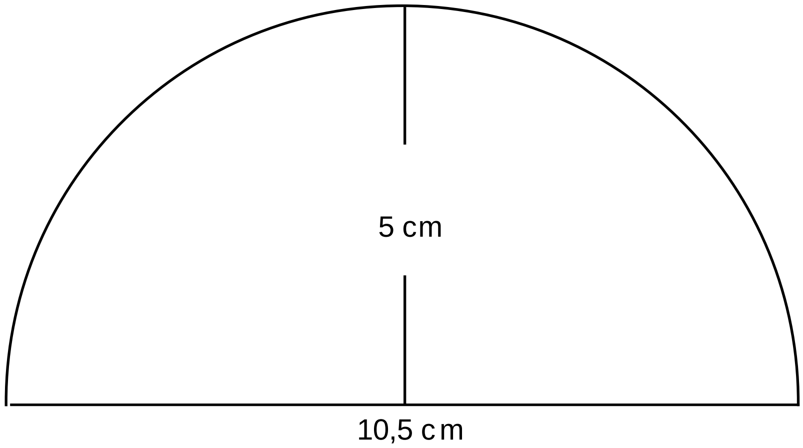
-segmentos circulares que no sean semicírculos, y en los que la medida de la perpendicular a la cuerda base mida 5 cm (el radio del semicírculo que reciben los niños):



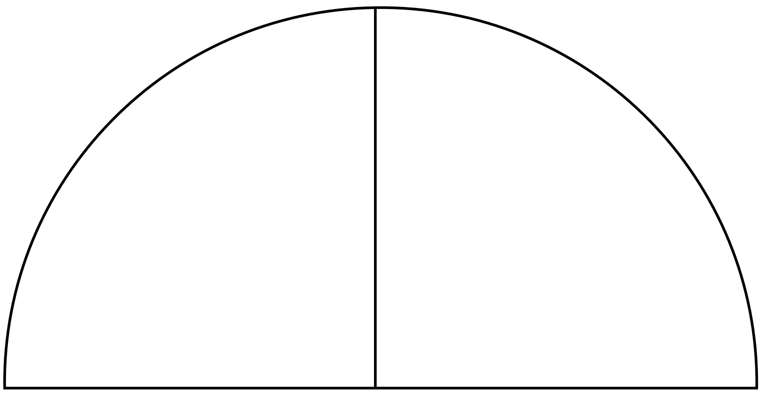


-semicírculos con diámetros próximos a 10 cm:





- un semicírculo cuyo diámetro mida 10 cm:



En un primer intento los niños piensan que es suficiente medir la base para ir a buscar la otra mitad del círculo. Obviamente, esta estrategia fracasa y cuando los niños retornan a sus asientos para armar el círculo se dan cuenta de que no eligieron de manera correcta. Este intento fallido retroalimenta la actividad y exige a los niños buscar nuevas relaciones. En general, los niños proponen medir el segmento perpendicular a la base que pasa por el punto medio, muchos de ellos sin tomar conciencia de que esa medida es la mitad de la base, o sea el radio. Otros, pese a haber encontrado que la longitud de la perpendicular a la base es igual a la mitad de dicha base, siguen midiendo varios segmentos que tienen por extremos un punto del arco y el punto medio de la base para "confirmar" que son todos iguales.

La puesta en común será el momento de identificar el radio del semicírculo y de establecer los distintos procedimientos que hacen posible su reconocimiento.

Retomemos una pregunta inicial: la actividad propuesta ¿es experimental o anticipatoria? Como ya lo hemos señalado, no es posible dar una respuesta tajante.

Evidentemente, en tanto los alumnos realizan lecturas directas de información sobre la figura con la que están trabajando (miden, pliegan) la actividad tiene una fuerte base experimental; pero la naturaleza del problema les exige anticiparse - a través de algunas relaciones- a la experiencia de juntar las dos partes para comprobar si se arma el círculo. Notemos que hay en la actividad un ida y vuelta entre lo experimental y lo anticipatorio: primero los niños experimentan, luego establecen algunas relaciones anticipatorias -sean correctas o no- para tomar la decisión en la elección. Hay a continuación una verificación experimental que alimenta -ya sea para confirmarlas o refutarlas- las anticipaciones realizadas.

5. El uso de los instrumentos geométricos

En nuestras conversaciones con maestros acerca de la enseñanza de la geometría aparece recurrentemente la preocupación por lograr que los niños sean hábiles en el manejo de los útiles de geometría. Compartimos, por supuesto, la preocupación y pensamos que es interesante enfrentar a los niños con actividades que les permitan ir logrando cada vez más destreza en el uso de los instrumentos.

Pero, ¿qué nivel de precisión exigimos a los niños?.

Hay problemas que requieren cierto nivel de precisión. Cómo ya fue analizado, en algunas actividades de copiado o de construcción a partir de mensajes, se propone que los alumnos superpongan lo producido con el original. En general, en las primeras versiones los alumnos encontrarán muchas diferencias. Entendemos que esta "falta de precisión", visible para los niños mismos, habrá de motorizar que ellos analicen lo que ha sucedido, revisen los mensajes, etc.

"Ser más precisos" es entendido en estos contextos no sólo como algo relativo al uso de los instrumentos de geometría, sino también como algo relativo al análisis de la figura que se hace, al modo en que se formulan, en este caso, las instrucciones para construir, y también como algo relativo al control sobre las producciones.

En ciertos problemas entonces la precisión y la destreza en el manejo de los instrumentos de geometría adquiere un cierto nivel de importancia.

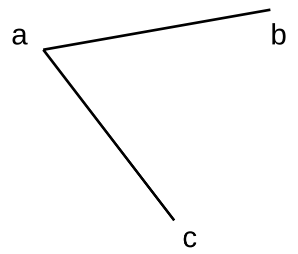
Si consideramos en cambio problemas como el ejemplo 1 o el ejemplo 2 del punto 4 (donde se deben determinar valores de ángulos), es posible realizar dibujos poco precisos, ya que solo servirán como apoyatura para establecer relaciones que permitan encontrar la medida de los ángulos.

Podríamos decir que la destreza no se enseña como objeto de la geometría, pero tampoco debe descuidarse ni mucho menos descartarla. La precisión en el uso de los instrumentos de geometría debe estar al servicio de la resolución de problemas y de las conceptualizaciones, que sí son objetos de estudio de la geometría.

Por otro lado, el uso de los instrumentos de geometría está relacionado con propiedades de los objetos geométricos. En nuestra propuesta planteamos que, a partir del uso, se propongan actividades dirigidas a explicitar y conceptualizar dichas propiedades (como ser el caso de la escuadra para trazar paralelas: al desplazarla apoyada sobre una recta se "barre"con todas las paralelas, pues son perpendiculares a una misma recta).

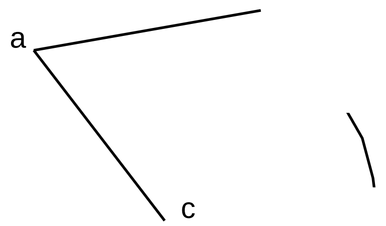
A su vez, autorizar o inhabilitar el uso de tal o cual instrumento es una de las variables que puede manejar el maestro para poner condiciones a los problemas de manera que en su solución se involucren diferentes relaciones entre los elementos de las figuras. Retomemos el siguiente ejemplo:

A partir del siguiente dibujo, completar la figura para que quede un rombo:

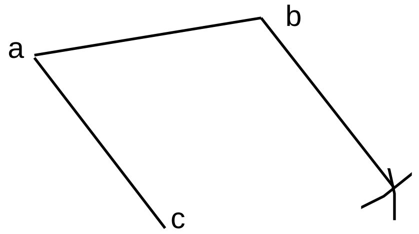


Si se permite usar únicamente regla no graduada y compás, un procedimiento posible sería pinchar el compás en el vértice a, abrir el compás hasta el vértice b.

Manteniendo esta distancia, pinchar sobre c y marcar el arco que colaborará en la obtención del cuarto vértice:



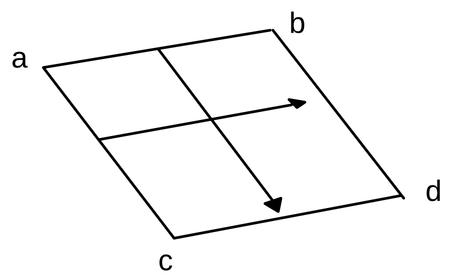
De la misma manera, se pincha sobre a , se abre hasta c y esta abertura se traslada pinchando ahora el compás en el vértice b:



Finalmente, donde se cruzan las dos marcas, estará el cuarto vértice.

Este procedimiento, a partir de los instrumentos permitidos, pone de manifiesto la propiedad de los rombos relativa a la igualdad de los lados.

Si en cambio, sólo se puede usar para terminar la construcción regla y escuadra, se trasladarán los lados conocidos de forma paralela, de manera que pasen por los vértices c y b. Donde se crucen dichos lados, se ubicará el punto d.



Este procedimiento, a partir de estos instrumentos, pone de manifiesto el paralelismo entre los lados opuestos.

En los ejemplos seleccionados, se busca que se expliciten relaciones en una figura, a partir de los instrumentos que se permiten usar. El énfasis no está puesto en la precisión en los dibujos, sino en las propiedades geométricas que las construcciones permiten poner en juego.

Comentarios finales

Puede haber resultado sorprendente que, en tiempos en los que los recursos computacionales están tan disponibles, nuestras propuestas pongan en escena las construcciones con lápiz, compás, regla... ¡tan pretéritas!

Esperamos haber mostrado que le otorgamos a las construcciones un rol específico en la elaboración de los conocimientos geométricos. No fueron incluidas por su utilidad en la vida cotidiana. De hecho proponemos usar instrumentos que ya prácticamente no "viven" fuera de la escuela.

Pensamos que muchas herramientas son posibles si las finalidades educativas están claras. En tal sentido y volviendo a lo que es objeto de este documento entendemos que el estudio de la geometría en la escolaridad obligatoria no responde esencialmente a necesidades prácticas[26]. Al contrario, lo defendemos porque hay un modo de estudiar geometría que permite que los alumnos desarrollen un modo de pensar, propio de la matemática, que sólo existe si la escuela lo provoca y al que creemos que todos los alumnos tienen derecho a acceder. Es la relación con el saber la que está en juego.

[26] Sin duda los conocimientos geométricos intervienen en la resolución de múltiples problemas prácticos, pero queremos enfatizar las razones que creemos han sido más descuidadas al considerar las finalidades de la enseñanza de la geometría.

Capítulo 2

Secuencias Didácticas

Introducción

En este capítulo se presenta el producto del trabajo llevado adelante con un grupo de docentes y coordinadores de ciclo de los Distritos Escolares N° 1 y N° 2.

El trabajo realizado consistió esencialmente en:
- reuniones para trabajar ante problemas geométricos, buscando recuperar y caracterizar el quehacer geométrico
- momentos de intercambio sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría y sobre los rasgos centrales del enfoque que se propone
- reuniones de análisis y revisión de las secuencias didácticas elaboradas por el equipo coordinador
- desarrollo de las secuencias en las clases de los maestros participantes con observación y registro de las mismas
- reuniones para analizar y evaluar el trabajo realizado en las aulas

Participar de un proyecto así demanda de los docentes una disposición a revisar sus modalidades actuales de enseñanza, a analizar propuestas nuevas, discutir sus fundamentos y condiciones, realizarlas efectivamente y compartir su revisión. Todo esto excede las tareas habituales y por ello queremos agradecerles públicamente a todos los participantes, quienes tuvieron a lo largo del trabajo un alto nivel de compromiso y una gran honestidad, tanto al describir su situación actual en relación a la enseñanza de la geometría como al plantearnos sus señalamientos respecto de lo que proponíamos.

Queremos agradecer a:

- los señores supervisores Roberto Zugaro y Oscar Muia, de los Distritos Escolares N° 1 y N° 2 respectivamente, quienes con plena disposición y rapidez generaron la posibilidad de puesta en marcha del proyecto.

- los directivos de las Escuelas N° 9 y N° 2 del Distrito N° 1 y de las Escuelas N° 16 y N° 22 del Distrito N° 2 que adoptaron el proyecto e hicieron todo lo que estuvo a su mano para facilitarlo, resolviendo en la vida cotidiana de la escuela los inconvenientes que inevitablemente les provocábamos. Entre ellos queremos mencionar especialmente a Nora Badaraco, Vicedirectora de la Escuela N° 2 del D.E. N° 1, Olga Esther Pó, Vicedirectora de la Escuela N° 16 del D.E. N° 2 y a Ana María De Rosa, Vicedirectora de la Escuela N° 22 del D.E. N° 2 quienes participaron activamente de todas las reuniones y acompañaron el trabajo en las escuelas.

- los maestros participantes:

María Laura SPINETTO	Escuela N° 9	D.E. N° 1
Susana KAPLAN	Escuela N° 9	D.E. N° 1
María Cristina LÓPEZ	Escuela N° 2	D.E. N° 1
Susana CAMPOS	Escuela N° 2	D.E. N° 1
Nélida Verónica PALLERES	Escuela N° 16	D.E. N° 2
Blanca VALLEJOS	Escuela N° 16	D.E. N° 2

Hermes FERNÁNDEZ Escuela N° 22 D.E. N° 2
Alicia Teresa PORRO Escuela N° 22 D.E. N° 2

Durante la elaboración de las secuencias contamos con la colaboración de docentes de distintas escuelas, quienes realizaron en sus aulas las actividades y nos aportaron datos para pensar el problema de la coherencia del conjunto de cada secuencia.

Agradecemos especialmente a las siguientes maestras[27]:

Flavia GUIBOURG
Dora CARRASCO
Silvia AVZARRADEL
Paula SLAFER

En la observación de clases y en el análisis del desarrollo de las secuencias destacamos la inestimable colaboración de un grupo de profesionales pertenecientes a la Dirección de Investigaciones. Ellas son:

Raquel GUTMAN
Cinthia KUPERMAN
María Emilia QUARANTA
Graciela ZILBERMAN

Al pensar en quienes hicieron posible este trabajo no podemos olvidarnos de los alumnos de los grados involucrados quienes, en verdad destinatarios de nuestro esfuerzo, nos recibían cada vez con expresa alegría, lo que nos alentaba a sostenerlo.
Hicieron, en muchas ocasiones, comentarios referidos a que les gustaba lo que estaban haciendo y si bien “el gusto de los niños” no es un criterio didáctico decisivo, cuando acompaña al trabajo y al aprendizaje, su presencia es bien valorable.

Como equipo de la Dirección de Currícula tenemos siempre la preocupación de tratar de producir materiales que, por un lado, sean capaces de señalar la dirección hacia donde orientar los esfuerzos para mejorar la enseñanza que reciben los alumnos, pero que, por otro lado, tengan capacidad de entrar en diálogo con las realidades y preocupaciones actuales, es decir que, aunque desafiantes, nuestras propuestas sean vividas como posibles y resulten finalmente útiles. Aunque la preocupación por el equilibrio ha de sostenerse y no recibe nunca respuestas definitivas, un trabajo con maestros y directivos como el realizado, alimenta enormemente nuestras reflexiones y nos confirma el valor del trabajo compartido con las distintas instancias del sistema educativo del que todos formamos parte.
Nuevamente y a todos, nuestro agradecimiento.

Algunos comentarios previos

Una reflexión que surgió tanto con los maestros, como con colegas de nuestra Dirección y de la Escuela de Capacitación se refiere a la poco extendida experiencia de leer y trabajar con secuencias como las que vamos a presentar. En la mayor parte de los textos didácticos circulantes (escasos de por sí) las propuestas, en general, apenas se esbozan dejando a cargo del maestro su concreción. Sin cuestionar la utilidad de discursos de ese tipo, a nuestro entender, deben al menos ser complementados con propuestas que intentan asumir el problema del funcionamiento

[27] Docentes del Instituto Integral Mundo Nuevo y Escuela Martín Buber.

de lo que se propone en la clase. Para ello entendemos que, además de los objetivos del conjunto de actividades, se deben explicitar las consignas de trabajo, la organización de la clase, los procedimientos de los alumnos, posibles errores y, cuando sea pertinente, indicar algunas formas de intervención docente que pueden ser sustantivas para el desarrollo de la clase. En general incluimos los aspectos sobre los cuales centrar las puestas en común, ya que creemos que son momentos claves para provocar la evolución del conjunto de la clase.

Algunos docentes consideran que este tipo de discurso es muy directivo. Realmente nuestra intención es la contraria. Es decir, creemos que el esfuerzo de explicitación que realizamos se orienta a que el docente conozca los elementos que le van a permitir a él llevar la dirección del proceso de enseñanza .

Cuando, en el primer capítulo de este documento, se analizan las variables didácticas que caracterizan las distintas modalidades de gestionar las construcciones en la clase se busca señalar, justamente, aquello que el docente puede manejar en función de los objetivos que persigue. En el segundo capítulo, en las secuencias construidas, se han tomado opciones en relación a un conjunto de variables intentando siempre fundamentarlas.

Hemos tratado de "alivianar" las secuencias didácticas lo más posible siempre y cuando eso no significara dejar afuera lo que consideramos sustantivo:

-**los objetivos**: no parece necesario justificar su importancia.

-**los materiales**: requieren preparación previa y en general se incluyen modelos en los anexos.

-**las consignas**: las hemos formulado en lenguaje directo o indirecto pero siempre con mucha precisión, no porque tengan que ser "repetidas" sino porque entendemos que expresan la finalidad y las condiciones en que ha de desarrollarse el trabajo de los alumnos. En tanto tales, algunos cambios no son irrelevantes. Como hemos mostrado en el capítulo primero, autorizar o no el uso de un instrumento de geometría o de un procedimiento es, justamente, lo que va a "forzar" en los alumnos la búsqueda o la puesta en juego de conocimientos objeto de la actividad.

-**los procedimientos esperados de los alumnos**: como hemos dicho en muchas oportunidades una de las condiciones de un buen problema es que pueda ser abordado de diversas maneras, que permita aproximaciones que incluyen tanto errores como aciertos. Esta diversidad, potente para el aprendizaje, es al mismo tiempo fuente de dificultades para el docente. Entendemos que, para poder estar dispuesto a darle lugar en la clase y para poder asegurar la evolución de los aprendizajes, el docente necesita tener una representación clara de lo que va a suceder en su aula y una previsión de sus intervenciones frente a la misma en dirección a adquisiciones comunes de los alumnos. En las secuencias didácticas mencionamos los procedimientos y errores posibles de los alumnos, y, para enriquecer más esa representación en "Instantáneas del aula" reproducimos testimonios de intercambios y producciones de los alumnos con los que trabajamos.

-**el desarrollo u organización de la clase**: en particular se orienta a señalar algunas formas de intervención docente que pueden ser sustantivas o a enriquecer la representación del docente sobre el acontecer en la clase. En general, al elaborar las secuencias nos hemos basado en el esquema de organización de la clase que fue descripto en el Documento Nº1 de Actualización Curricular en Matemática.

-**las puestas en común**: consideramos que son momentos claves para provocar la evolución del conjunto de la clase pero en general es difícil saber en qué centrarlas y cómo manejarlas en función de lo que se pretende. Hemos querido brindar elementos que las orienten pero somos conscientes de que son el tipo de prácticas que no se aprenden sólo leyendo y que para aprender sobre ellas resulta muy fecundo tanto observar colegas llevándolas adelante como recibir comentarios sobre la propia conducción de estos momentos de la clase.
Las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro constituyen un aspecto central en el enfoque de la enseñanza que propugnamos. Como acabamos de decir, son sin duda complejas y entendemos que han de constituirse en objeto de trabajo. Como aporte a tal reflexión hemos resuelto incluir, bajo la forma de anexo de este documento, la reproducción de una parte de un material curricular, dirigido a la formación docente, denominada *“Organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro”*:

Tal como recomendáramos en la introducción general del documento, pensamos que es muy útil leer las secuencias con papel, lápiz y los útiles de geometría a mano.

GEOMETRÍA CUARTO GRADO
CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Secuencia didáctica elaborada por el equipo de Matemática de la Dirección de Currícula, G.C.B.A. integrado por Patricia Sadovsky, Cecilia Parra, Horacio Itzcovich y Claudia Broitman.

ÍNDICE de la FICHA DIDÁCTICA

Presentación

Esta secuencia apunta a la enseñanza de la circunferencia y del círculo. Ha sido reelaborada a partir del trabajo de desarrollo curricular realizado durante 1997 tal como fue descripto. Los maestros que trabajaron en el proyecto han puesto en marcha una versión de la secuencia en ciertos aspectos diferente de la presente. A partir de lo que hemos observado en las clases, de las producciones de los alumnos y de los comentarios de los docentes luego de haber realizado en sus aulas las actividades propuestas, hemos revisado algunos aspectos y producido esta nueva versión -también como la anterior -sujeta a nuevos cambios.

La propuesta didáctica está organizada en cuatro partes que implican un orden sucesivo dado que en cada una se retoman los conceptos abordados en la anterior. Los docentes decidirán cómo distribuir a lo largo del año las diferentes etapas de la propuesta.

Comentaremos brevemente los objetivos de cada etapa.

La **primera parte** llamada **El Uso del Compás** tiene como objetivo que los alumnos se familiaricen con el uso del compás como instrumento para el trazado de circunferencias y como elemento que permite trasladar segmentos.

En primer lugar proponemos que los alumnos copien diferentes figuras. Al tener que decidir "dónde pinchar el compás", "cuánto abrirlo" y "hasta dónde prolongar el trazo" movilizarán a nivel implícito ciertas relaciones relativas a la circunferencia que se irán trabajando en las etapas siguientes.

En segundo lugar se plantean actividades que apuntan a que los alumnos reconozcan el compás como instrumento que permite trasladar medidas.

En estas actividades los niños pueden apreciar por sí mismos el nivel de precisión de su trabajo a través de la superposición de sus construcciones con los modelos recibidos. Al comparar su propia producción con el modelo original e intentar reproducir mejor la figura se "alimenta" el trabajo de los niños: tendrán que analizar las diferencias entre sus producciones y los modelos.

La **segunda** parte de la secuencia "**Circunferencia y Círculo"** tiene como objetivos trabajar dichas nociones. Los aprendizajes vinculados a los conceptos de círculo y circunferencia son complejos y abarcan varios años de la escolaridad. Hasta ahora probablemente los niños han tenido un manejo intuitivo de dichos conceptos y no han distinguido entre ambos. En esta secuencia nos hemos propuesto que los niños comiencen a aproximarse a una definición que ponga en juego la distancia entre puntos.

La **tercera parte** llamada "**Construcciones con circunferencias**" propone a los alumnos la elaboración de instrucciones para construir figuras. En este momento del trabajo, ya se han explicitado ciertas relaciones en la clase e incorporado definiciones y vocabulario específico a partir de las actividades de la segunda parte.

Entendemos que la producción de un texto escrito con instrucciones para la construcción de figuras puede favorecer en los niños la reinversión de lo producido en las actividades anteriores.

Los alumnos comparan la figura obtenida con el original recibido por el otro grupo. De esta manera podrán tener una apreciación del nivel de logro alcanzado en la actividad. La comparación y el análisis realizado por dos grupos será un aporte para una nueva situación de redacción de instrucciones para construir otras figuras.

La **cuarta parte** de la secuencia llamada "**Hacia la construcción de triángulos**" plantea a los alumnos nuevos problemas en los que tienen que encontrar puntos que cumplan con dos condiciones de distancia simultáneamente.

Se plantean problemas para los cuales la solución está dada por dos puntos y problemas en los cuales ningún punto reúne las dos condiciones solicitadas, es decir se trata de problemas geométricos con dos soluciones y sin solución.

Síntesis de objetivos de la secuencia

Que los niños puedan:

- Usar el compás como elemento para transportar medidas
- Establecer relaciones entre figuras geométricas
- Analizar relaciones entre los elementos de una figura como medio para lograr copiarla
- Explicitar procedimientos de construcción
- Concebir la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro
- Concebir el círculo como conjunto de puntos que están a una distancia de un centro menor o igual que una distancia dada
- Usar la definición de circunferencia y de círculo para resolver problemas que consideren una o dos condiciones

Actividad previa a la secuencia didáctica:

Esta actividad tiene el objetivo de que los alumnos puedan familiarizarse con el uso del compás para el trazado de figuras. En el caso de que los alumnos ya hayan tenido oportunidad de trabajar con dicho instrumento, no será necesario este momento de trabajo.

Materiales:
Compás para cada alumno.

Consigna:
"Van a usar el compás para hacer dibujos. Prueben qué figuras pueden hacer."

Desarrollo previsto de la clase:

Se trata de una actividad cuyo objetivo es la familiarización con el compás como instrumento. Es esperable que a los niños les resulte complejo el trazado de circunferencias especialmente por el tipo de compases que suelen utilizar. Se espera entonces en esta fase que el docente enseñe a los niños a manejarlo. Se introduce el término circunferencia si los niños no lo conocen.

PRIMERA PARTE: EL USO DEL COMPÁS

Actividad 1

Objetivo: Usar el compás como instrumento para trazar circunferencias y arcos de circunferencia.

Esta actividad apunta a que los alumnos empiecen a poner en juego a nivel implícito ciertas relaciones para trazar figuras circulares. **No** se pretende a través de este trabajo introducir el vocabulario relativo a elementos de la circunferencia (centro, diámetro).

Materiales:
Compás y regla para cada alumno.

Consigna:

"Les voy a repartir una fotocopia con tres dibujos. Usando la regla y el compás los van a copiar en estas hojas blancas que les voy a dar. No pueden calcar los dibujos. Cuando terminen tienen que superponer sus dibujos con los originales para ver si les quedaron iguales. Si no les quedaron iguales tratan de analizar por qué y los rehacen."

figura 1

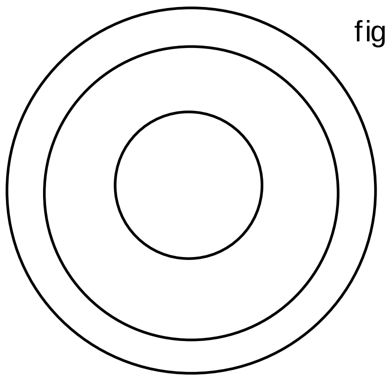


figura 2

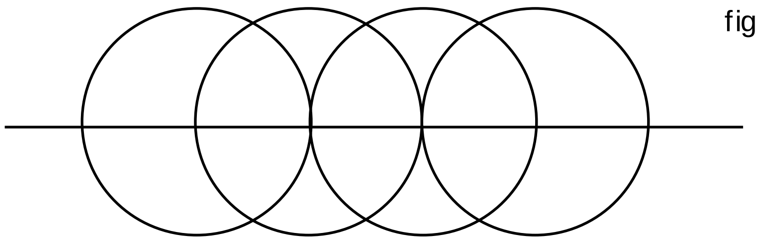
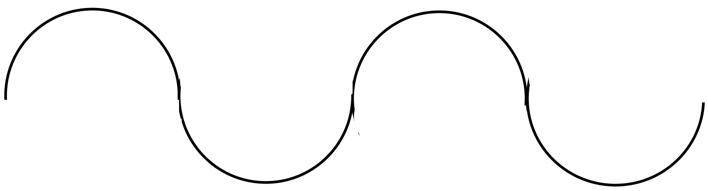


figura 3



Procedimientos de los alumnos:[28]

Para la figura 1 los alumnos deberán reconocer que se trata de tres circunferencias que coinciden en su centro (concéntricas) pero cuyos radios varían. Seguramente algunos niños comenzarán el trazado por el segmento, otros por la circunferencia mayor y otros por la menor. En esta figura no es relevante determinar por dónde comenzar.

Lograr reproducir la figura 2 supone el reconocimiento implícito por parte de los alumnos de que se trata de cinco circunferencias del mismo radio cuyos centros están alineados. La intersección de cada circunferencia con la recta determina el centro de otra circunferencia. Es posible que no todos los alumnos se den cuenta de la conveniencia de trazar en primer lugar la recta.

Para la figura 3 los alumnos deberán establecer que se trata de una cadena de "mitades" de circunferencias de radios iguales y tendrán que tomar decisiones para lograr que los centros queden alineados y para poder saber donde "termina" cada semicircunferencia.

Posiblemente muchos niños realicen arcos de circunferencia y no "controlen" que se trata de semicircunferencias. Para conseguir la alineación algunos niños apoyan la regla y otros trazan una porción de recta.

Desarrollo de la clase:

A medida que los niños van finalizando los copiados el docente les recuerda que deben superponer las figuras con los originales. Invita a los niños a comparar las figuras. El docente propondrá a los niños cuya producción es muy diferente del original que realicen nuevamente las construcciones. Se sugiere a los niños que se ayuden entre ellos para que todos logren el copiado.

Puesta en común:

La puesta en común se inicia cuando los alumnos han copiado las tres figuras, las han superpuesto con los originales y han tenido oportunidad de rehacerlas en los casos en lo que se han encontrado con diferencias importantes.

El docente plantea una síntesis de lo realizado por los niños. Incluye en la misma las dificultades que ha observado, muestra algunas producciones y comenta el avance producido en los nuevos intentos de copiado. Luego propone a los alumnos comparar la función de la recta en cada una de las tres figuras.

El objetivo de la puesta en común es que los alumnos logren distinguir que en la primera figura es indistinto iniciar el trazado por la recta o no, en el segundo caso es necesario realizar en primer lugar la recta para controlar que las circunferencias que se trazan estén alineadas y en la tercera figura la recta es una construcción auxiliar, ya que no forma parte de la misma, pero es necesaria su construcción.

Dado que la introducción de un elemento que no forma parte del dibujo no es un procedimiento usual, es interesante en la puesta en común destacar la posibilidad de construir una recta auxiliar para la tercera figura que luego pueda ser borrada.

[28] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

Actividad 2

Objetivo: Usar el compás como instrumento para transportar la longitud de un segmento.

Materiales:
Para cada alumno: una hoja lisa en la que hay dibujados tres segmentos de distinta longitud, una hoja lisa en blanco, un compás y una regla no graduada[29].

Consigna:

"En esta hoja hay dibujados tres segmentos. Ustedes tienen que dibujar en la hoja en blanco tres segmentos de la misma longitud que los que reciben. No es necesario que los dibujen en la misma posición. Para hacerlo pueden usar estas reglas (reglas no graduadas) y el compás, pero no pueden usar la regla común. Tampoco puede hacer marquitas en la regla que les damos ni doblar la hoja. Cuando terminan recién pueden superponerlos para ver si les quedaron iguales."

(Es importante que los alumnos tengan que reproducir los segmentos en papel liso como para que los renglones no funcionen como rectas auxiliares).

Procedimientos de los alumnos:[30]

Los chicos en general se dan cuenta de la posibilidad de "medir" los segmentos a través de la abertura del compás pero no es inmediato que dibujen una recta sostén para el segmento. La marca del pinche del compás es uno de los extremos del segmento, luego marcan un arco. El otro extremo del segmento lo eligen "a ojo" entre los puntos del arco que trazaron. Esto les da la posibilidad de hacer "infinitos" segmentos, pero no es probable que los chicos se den cuenta de eso inmediatamente.

Para saber si lograron resolver el problema planteado, los niños deberán superponer los segmentos de la hoja que recibieron con los que ellos trazaron. El docente propone a los alumnos que rehagan su trabajo si no les ha quedado de la misma longitud que el original.

Breve puesta en común:

El docente hace una síntesis de los procedimientos utilizados por los niños incluyendo aquellos que no han permitido controlar la igualdad de los segmentos. Realiza en el pizarrón la misma tarea que realizaron los niños y explicita que cualquier punto del arco que se traza haciendo centro en uno de los extremos puede ser el otro extremo del segmento. El compás del pizarrón "no deja marcas" como el compás de los niños en sus hojas, con lo cual será necesario en el pizarrón marcar el punto. Esta diferencia puede ser explicitada, pues también es un posible procedimiento a usar en la hoja.

El docente puede preguntar a los alumnos qué diferencias encuentran entre transportar una medida con regla no graduada y compás y hacerlo con la regla

---

[29] Denominamos regla no graduada a aquella que carece de medidas y solamente permite el trazado de rectas y no su medición. Pueden ser trozos de madera o acrílico, o bien reglas comunes a las que se les han tapado los números.

[30] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

“común”. Se espera que los alumnos puedan formular enunciados del tipo “con la regla común mido los centímetros y después dibujo la misma cantidad de centímetros, con el compás mido una longitud y la transporto aunque no sé cuántos centímetros tiene”, “con el compás puedo transportar un segmento que ya tengo, pero si me dicen, por ejemplo, que trace un segmento de 5 centímetros, necesito la regla común”.

Actividad 3

Objetivo: Usar el compás como instrumento para duplicar la longitud de un segmento.

Materiales:

Para cada alumno: una hoja lisa en la que hay dibujado un segmento, una hoja lisa en blanco, un compás y una regla no graduada.

Consigna:

“En esta hoja hay dibujado un segmento. Ustedes tienen que dibujar en la hoja en blanco otro segmento que tenga el doble de la longitud del que reciben. Del mismo modo que en la actividad anterior para hacerlo pueden usar reglas no graduadas y el compás. No pueden hacer marquitas en la regla ni doblar la hoja.

Cuando terminan el trazado lo superponen con dos segmentos recibidos (le piden a un compañero que les preste el suyo) para ver si les quedó igual que dos segmentos juntos.”

Procedimientos de los alumnos:

Posiblemente los chicos utilicen el mismo procedimiento que en la actividad anterior: tracen el segmento y luego vuelvan a transportarlo al lado del otro. En ese caso no habrán controlado la continuidad en la dirección de las dos partes del segmento y les quedará “torcido”. Para poder garantizar que ambas partes formen realmente un nuevo segmento deberán dibujar una recta sostén, pero no es probable que los chicos se den cuenta de eso inmediatamente.

Para saber si el segmento que ellos trazaron les quedó efectivamente del doble de longitud del recibido solicitan a un compañero que les “preste” su segmento recibido. Los niños podrán superponer los dos segmentos de las hojas que recibieron con el que ellos trazaron.

Pueden usar la regla no graduada para ver si les quedaron alineados. Se les solicita que vuelvan a realizar la construcción si no les quedó del doble de longitud o si no están alineados.

Puesta en común:

En la puesta en común el docente hace una síntesis de lo realizado por los niños mostrando diversas producciones y procedimientos. Luego pregunta a sus alumnos si están seguros de que están derechos. Se establece que para controlar que “salgan derechos” esta vez es necesario trazar una recta auxiliar sobre la que se señalen los dos segmentos iguales.

Síntesis de la primera parte:

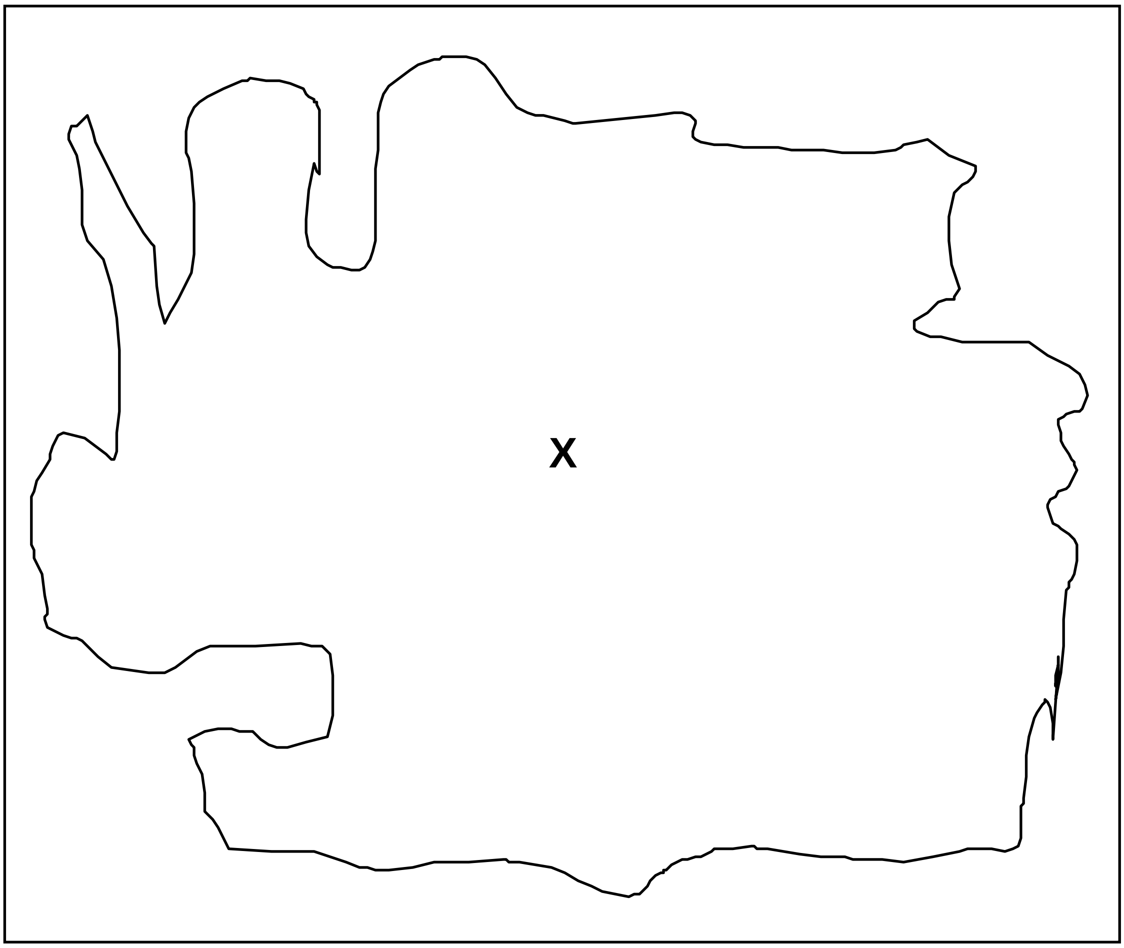
El docente evoca lo realizado en las diferentes actividades y pregunta a sus alumnos qué aprendieron en dichas clases. Se espera que los niños expresen frases como las siguientes: “aprendimos a usar el compás”, “aprendimos que el compás sirve para hacer circunferencias y partes de circunferencias”, “también sirve para copiar y duplicar segmentos”, etc. Se registra por escrito una síntesis colectiva de las respuestas en relación con el uso del compás.

SEGUNDA PARTE: CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Actividad 1

Objetivo: definir la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro

Materiales:
Para cada alumno: una fotocopia con un dibujo, compás, regla graduada.



Organización de la clase:

Los alumnos trabajan individualmente para resolver la situación (alrededor de 10 minutos) y luego se reúnen por equipos (de aproximadamente 4 niños) para compartir el producto de la actividad. Cada niño recibe una fotocopia de un dibujo.

Consigna:

"Este es el dibujo de una pantalla de computadora del juego "Los piratas". Ustedes tienen que señalar dónde podría estar el tesoro. Saben que está a 5 cm de la cruz. Primero van a trabajar individualmente. Después se reúnen con los compañeros del equipo para ver si todos están de acuerdo en lo que han señalado. Si no están de acuerdo entre ustedes tienen que tratar de convencerse unos a otros hasta llegar a un acuerdo. Una vez que todos los grupos hayan terminado vamos a discutir entre todos."

Procedimientos de los alumnos:[31]

Es probable que algunos niños tracen, utilizando la regla solamente, algunos puntos posibles ubicados a 5 cm de la cruz. La interacción con los compañeros los ayudará a enriquecer el campo de posibles puntos. Si los niños se "conforman" con los pocos puntos trazados el docente instará a buscar otros posibles.

Aunque ya se haya explicitado que el compás sirve para transportar medidas, es poco probable que los niños intenten usarlo de entrada ya que hasta el momento el compás fue usado para transportar una medida dada o para trazar circunferencias y no para encontrar un conjunto de posibles puntos que cumplen una condición.

En la medida en que los niños no reconocen la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro, no hay razones para esperar que se den cuenta inmediatamente de que el compás es un instrumento para resolver el problema. Casi todos los niños iniciarán el proceso de exploración con la regla.

Tal vez algunos niños marquen muchos puntos, luego se den cuenta de que se empieza a formar una circunferencia. Posiblemente entonces abandonen la búsqueda de puntos con la regla y usen el compás para su trazado.

Es esperable que no todos los niños encuentren "todos" los puntos y consideren terminada la búsqueda con "muchos" puntos marcados.

Puesta en común:

Se inicia la puesta en común cuando la mayoría de los niños dice ya haber encontrado dónde puede estar el tesoro. El docente hace una síntesis de las diferentes respuestas de los alumnos al problema y muestra trabajos con soluciones diversas incluyendo las que no están completas. Luego les pregunta "¿Qué piensan ustedes? ¿Cuáles pueden ser? ¿Cuáles no? ¿Por qué?"

Se espera provocar una discusión en la cual los chicos argumenten acerca de cuáles son "todos los posibles" puntos.

En las actividades anteriores hemos planteado que los niños tendrán la oportunidad de conocer la precisión de su trabajo a partir de la comparación directa con los originales. En estas actividades, en cambio, la solución al problema queda planteada en esta fase colectiva. Es decir que al inicio de la puesta en común aparecen diversas soluciones al problema, pero recién a partir de la discusión quedara planteada como solución al problema el trazado de una circunferencia.

---

[31] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

La mayoría de los niños sólo ha resuelto parcialmente el problema, pero tendrá la oportunidad luego de la puesta en común de trazar la circunferencia por encima de los puntos ya marcados “completando” con otros puntos donde puede estar el tesoro.

El maestro define entonces a partir de este “descubrimiento” a la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de uno dado que se llama centro y define radio como cualquier segmento que une el centro con algún punto de la circunferencia.

En esta fase colectiva probablemente los niños podrán vincular diferentes aspectos con los que han trabajado:

- para encontrar los posibles puntos hay que transportar siempre la misma medida
- la tarea se puede hacer con el compás
- la figura formada por los posibles puntos es una circunferencia
- la circunferencia es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de un centro.

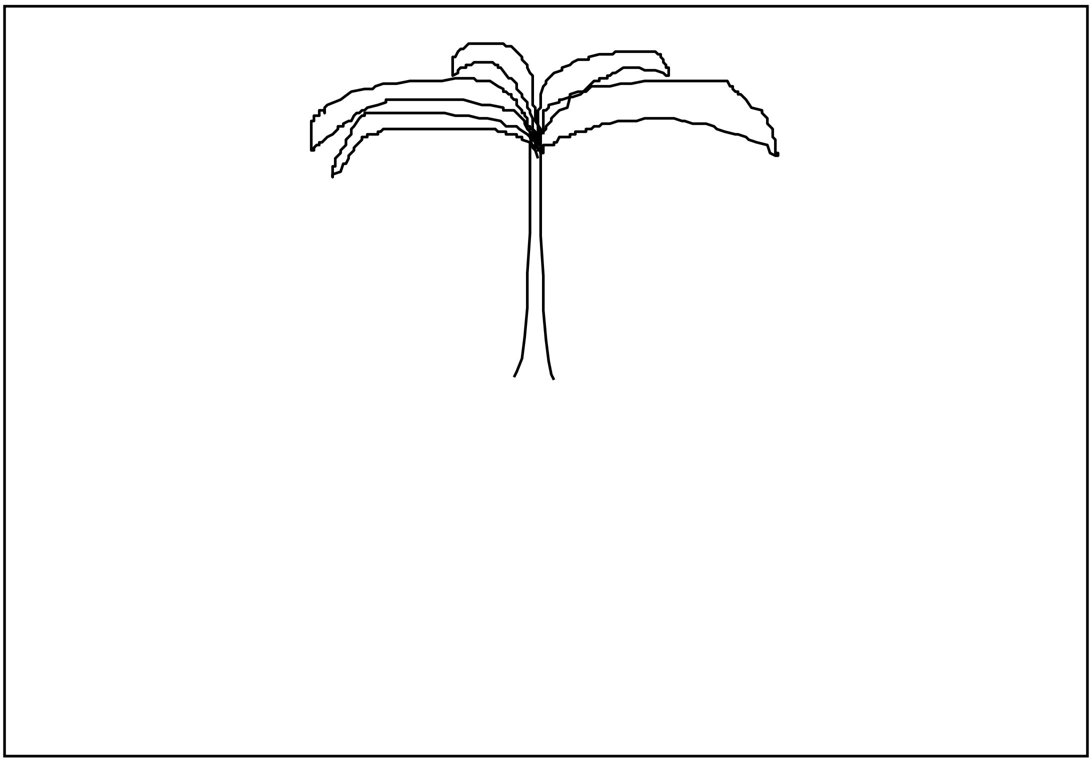
No estamos pensando que los niños tendrán este nivel de precisión en sus conceptualizaciones, simplemente queríamos puntualizar las ideas que se coordinan como consecuencia del trabajo propuesto.

Actividad 2

Objetivo: definir el círculo como el conjunto de puntos cuya distancia a un centro es menor o igual que el radio.

Materiales:

Para cada alumno: una fotocopia con un dibujo, compás, regla graduada.



Consigna:

"Les voy a dar una hoja con el dibujo de otra pantalla del juego de los piratas. La zona que está a 2 cm o menos de la base de la palmera es una zona que no se puede pisar. Ustedes tienen que marcarla en el dibujo."

Procedimientos de los alumnos:[32]

El pasaje de circunferencia a círculo supone para los niños un salto de línea a superficie, salto que no todos están en condiciones de dar de inmediato. Posiblemente muchos niños tracen solamente la circunferencia señalando los puntos que están a 2 cm, pero no tendrán en cuenta los que están a menos de 2 cm. El docente podrá preguntarles indicándoles un punto del círculo si ahí se puede o no pisar y los instará a buscar otros puntos en los que tampoco se pueda.

Algunos niños empezarán a marcar puntos del círculo trazando radios bien próximos y marcando en ellos varios puntos. Otros niños realizarán circunferencias concéntricas y en las mismas marcarán más puntos. Posiblemente algunos niños consideren que "menos que 2 tiene que ser a 1 cm" pues para ellos "1 es el anterior a 2". A partir de esta "idea" muchos chicos señalarán los puntos de la circunferencia de radio 2 y luego los puntos de la circunferencia de radio 1 sin reconocer que los puntos que están entre ambas también están a menor distancia que 2.

La mayoría de los niños utilizando diferentes procedimientos intentará marcar "muchos" puntos. Es posible que algunos niños se den cuenta de que todos los puntos del círculo forman parte de la zona prohibida y pinten la zona en lugar de marcar decenas de puntos.

Puesta en común:

Se inicia la puesta en común cuando la mayoría de los niños dice haber encontrado la zona prohibida. El docente comenta que hubo diferentes respuestas al problema y muestra algunas producciones a todos los alumnos. Plantea preguntas acerca de qué opinan acerca de las diferentes soluciones.

Promueve que en primer lugar los alumnos que marcaron puntos en radios o circunferencias concéntricas defiendan sus producciones y en segundo lugar lo hagan quienes han encontrado el círculo como solución al problema.

Se discuten colectivamente las distintas propuestas que posiblemente se dividan en los que marcaron puntos y los que pintaron el círculo.

El maestro pregunta cómo pueden estar seguros los niños de que han encontrado "todos" los puntos de la zona.

Al igual que en la actividad anterior la mayoría de los niños ha resuelto el problema solo parcialmente encontrando "algunos" puntos. Se espera que recién en esta fase colectiva quede determinado el círculo como solución al problema.

El maestro explica que al trazar la circunferencia quedan definidas tres "zonas": la de la circunferencia, la de su interior y la de su exterior. A partir de esto pide a los alumnos que definan las tres zonas en función de sus distancias al centro (puntos que están a 2 cm, a más de 2 cm y a menos de 2 cm).

Como síntesis de la actividad se define círculo como conjunto de puntos cuya distancia a un centro es menor o igual que una distancia determinada. Se compara la solución de este problema con la del problema anterior y se registran por escrito las conclusiones.

---

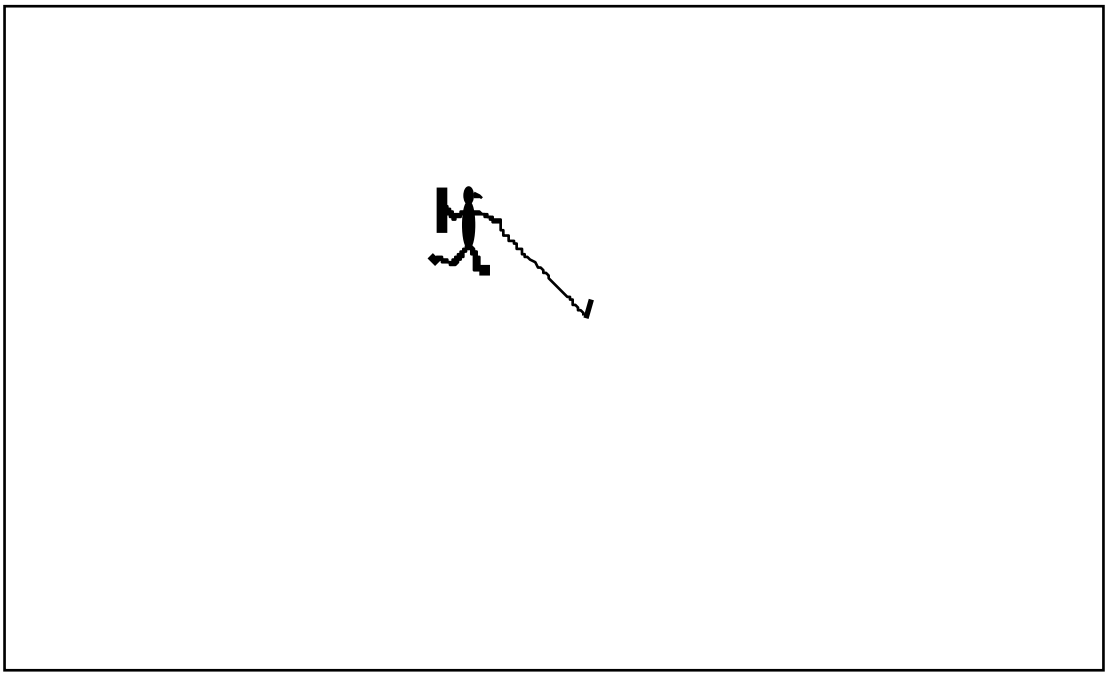
[32] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

Actividad 3

Objetivo: Reinvertir la noción de círculo como conjunto de puntos que están a menor o igual distancia de un punto.

Materiales:

Para cada alumno: una fotocopia con un dibujo, compás, regla graduada.



Consigna:

"¿Se acuerdan del juego de los piratas? Ahora les voy a mostrar el dibujo de otra pantalla del juego. Un ser extraño fue capturado por los piratas que lo ataron a una estaca con una soga que tiene en el cuello. La soga tiene 3 cm de largo. Hay que colorear completamente la zona por la que puede caminar el extraño ser."

Puesta en común:

El docente muestra las producciones y comenta las diferentes soluciones del problema que han encontrado los niños. En la discusión colectiva queda planteado el círculo como zona por la que puede caminar el "ser". En este momento se define radio del círculo como radio de la circunferencia correspondiente.

Como cierre de las actividades 1,2 y 3 será interesante sintetizar todo lo que los niños han aprendido sobre circunferencia y círculo. El docente elegirá la modalidad que crea conveniente para hacer la síntesis.

Actividad 4

Objetivo: Inventar procedimientos que reemplacen al compás para el trazado de circunferencias.

Materiales:
Trozos de soga de más de un metro (uno por grupo)
Tizas
Compás de pizarrón (2 ó 3)
Metro o centímetro (uno por grupo)
Tijeras
Reglas de pizarrón.

Organización de la clase:
Los niños trabajan por grupos de aproximadamente 4 en el patio de la escuela.

Consigna:
"Hoy vamos a trazar circunferencias en el piso del patio. Cada grupo va a trazar una circunferencia de 1 metro de radio. Tienen que pensar en cada grupo qué materiales necesitan para hacerlo y me los tienen que pedir."

Procedimientos de los alumnos:[33]
Los alumnos en primer lugar seguramente intentarán usar el compás de pizarrón. Al constatar que no sirve, los niños deberán pensar en los distintos recursos utilizados en las fases anteriores. Se espera que pidan reglas largas, sogas o centímetros.

Una vez que los niños han imaginado un trazado posible, deberán enfrentarse a problemas que no se presentan cuando se trabaja con las dimensiones de la hoja de papel: cómo "mantener" el centro de la circunferencia, cómo sostener la soga o el centímetro (al ras del piso, a la altura de las manos, etc.) para definir la circunferencia y cómo trazarla efectivamente.

Cuando los niños consideren que han terminado, el maestro les pedirá que verifiquen la construcción. Les podrá preguntar cómo pueden estar seguros de que aquello que han construido es efectivamente una circunferencia.

Puesta en común:
El docente invita a representantes de los grupos a comentar qué han hecho. Luego promueve una primera discusión alrededor de los métodos utilizados: ¿Fueron todos útiles?

Será interesante luego poner en común los problemas que se les presentaron para construir la circunferencia y para verificar la construcción. Se compararán los usos del compás y de la soga o regla o centímetro como instrumentos para realizar circunferencias.

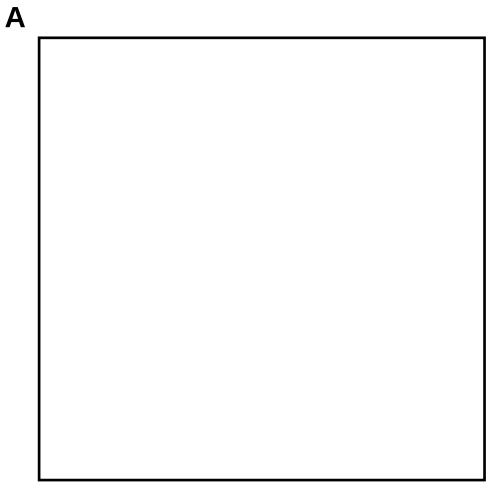
Queda planteado en esta fase colectiva "cómo hacer para trazar circunferencias sin compás". Se registran las conclusiones por escrito.

[33] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

<u>Actividad 5</u>

Objetivo: Reinvertir la noción de circunferencia y de círculo en la resolución de problemas en los que intervienen otras figuras.

Materiales:
Para cada alumno: una fotocopia con un dibujo de un cuadrado de 6 cm de lado cuyo vértice superior izquierdo se lo designa con la letra A, compás, regla graduada.

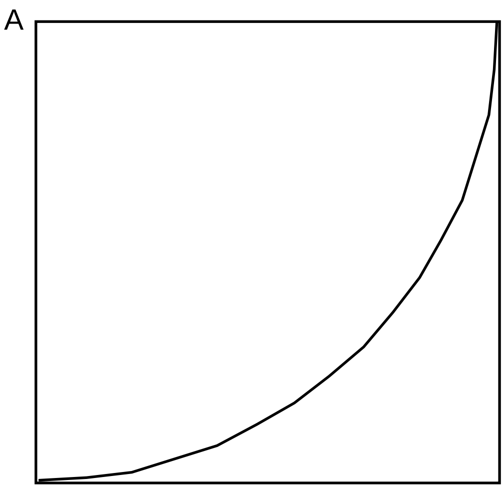


Consigna:

"La comisión directiva de un club llamó a concurso para diseñar distintivos. Cada uno de ustedes tendrá que colorear el esquema de acuerdo con las instrucciones. El distintivo es un cuadrado de 6 cm de lado. En este distintivo hay que pintar:

- de amarillo la parte que está a 6 cm del punto A,
- de azul la parte que está a menos de 6 cm de A,
- de rojo la parte que está a más de 6 cm de A.

Una vez que hayan terminado se reúnen en grupos y discuten si todos están de acuerdo en la manera en que han coloreado el esquema. Luego lo vamos a discutir entre todos."



Procedimientos de los alumnos:[34]

Posiblemente a los niños les resulte complejo trazar un arco de circunferencia. Algunos intentarán trazar la circunferencia completa, y otros dirán que no se puede porque no "entra". El docente explicará que no se puede pintar afuera porque representa un trozo de tela cortado.

Es probable que reaparezcan las aproximaciones parciales de las actividades anteriores como por ejemplo marcar una circunferencia concéntrica de 5 cm de radio porque "menos que 6 es 5" y por lo tanto dejar una zona sin pintar.

Otros niños posiblemente pinten los radios de diferentes colores según "hasta donde lleguen" sin tener en cuenta que en el mismo radio los diferentes puntos no están a igual distancia de A.

Puesta en común:

Se inicia la puesta en común cuando los niños finalizan el pintado aun cuando no todos hayan resuelto correctamente el problema.

El docente hace una síntesis de las soluciones encontradas por los niños y muestra diferentes producciones. Luego plantea a los alumnos: ¿Con cuáles están de acuerdo, con cuáles no y por qué?

Se intentará provocar una discusión y argumentaciones que justifiquen las diferentes respuestas. Se espera que recién en esta fase colectiva quede planteado para todos los alumnos el arco de circunferencia determinando las tres zonas de puntos: los que están a 6 cm en el arco, los que están a menos de 6 cm y los que están a más de 6 cm.

El docente plantea los errores que aparecen para discutir entre todos, por ejemplo aquellas producciones de los niños que hayan dejado sin pintar la zona entre 5 y 6, aquellas en las que se han pintado los radios enteros del mismo color, etc.

Es interesante también plantear en esta fase colectiva cómo hicieron para saber qué puntos estaban justo a 6 cm. Seguramente algunos niños utilizaron la regla para medir los 6 cm y marcaron puntos y otros trazaron el arco con el compás a partir de dicha medida.

Se tratará de que los niños tomen conciencia de que el lado del cuadrado podía ser utilizado para saber "cuánto abrir el compás" sin necesidad de medir con la regla.

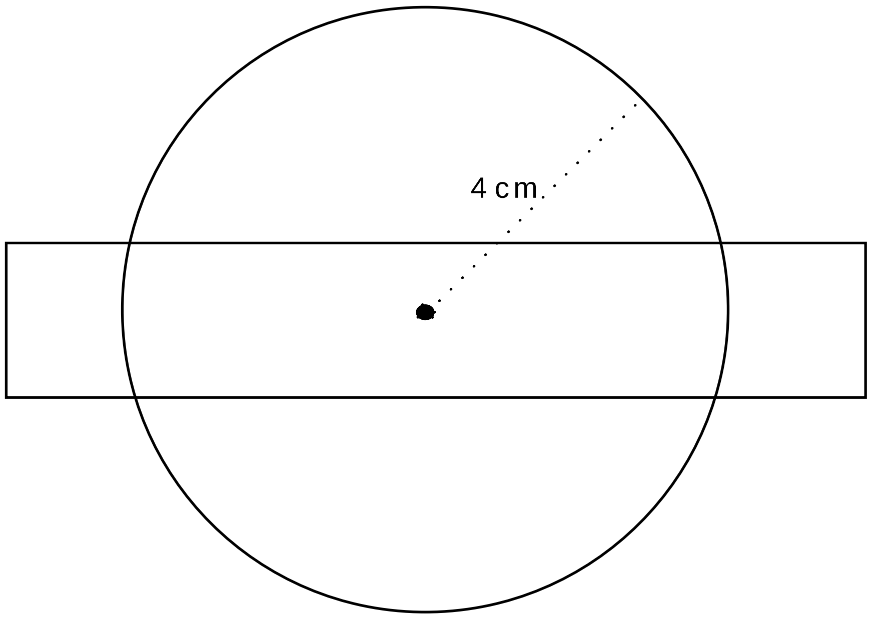
[34] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

<u>Actividad 6</u>

Objetivo: Reinvertir la noción de círculo y circunferencia en problemas en los que intervienen otras figuras.

Materiales:

Para cada alumno: una fotocopia con un dibujo, compás, regla graduada.

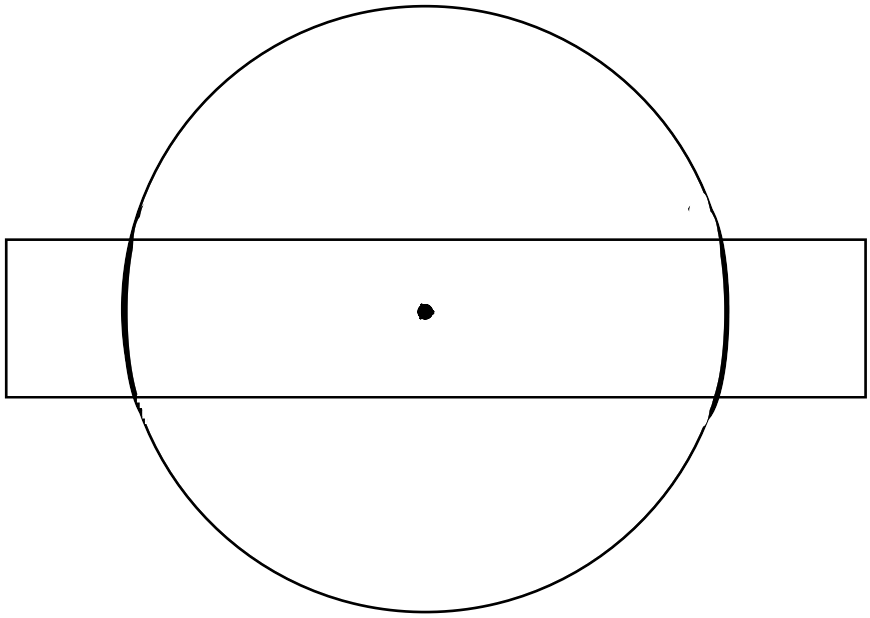


Consigna:

"Vamos a realizar otro distintivo en el que hay que pintar todo el rectángulo. La circunferencia tiene 4 cm de radio. Las instrucciones para colorear el rectángulo son las siguientes:
-Pintar de rojo la parte del rectángulo que está a más de 4 cm del centro de la circunferencia.
-Pintar de verde la parte del rectángulo que está a 4 cm del centro de la circunferencia.
-Pintar de amarillo la parte del rectángulo que está a menos de 4 cm del centro de la circunferencia."

Procedimientos de los alumnos:

Utilizando la información de la medida del radio se puede establecer que los puntos del rectángulo que coinciden con la circunferencia están a 4 cm del centro y que por lo tanto los dos arcos van pintados de verde.



Del mismo modo se puede determinar que los puntos que están afuera de la circunferencia están a más de 4 cm de distancia del centro y que deben ir pintados de rojo, y que los puntos del rectángulo que pertenecen al círculo, pero no a la circunferencia, irán pintados de amarillo pues están a menos de 4 cm de distancia del centro de la circunferencia.

Posiblemente muchos niños –al igual que analizamos en la actividad anterior– no tendrán en cuenta la información de la medida del radio de la circunferencia dada y por lo tanto realizarán mediciones con la regla graduada para ubicar los puntos. Los errores de medición pueden llevarlos a pintar en forma errónea los puntos del rectángulo.

Puesta en común:

La puesta en común se inicia con la síntesis que hace el docente de los diferentes procedimientos utilizados por los niños. Luego muestra diferentes soluciones al problema.

El docente plantea preguntas acerca de los diferentes trabajos abriendo una discusión acerca de cómo se puede estar seguro de que el problema está bien resuelto. Se espera que, frente a la necesidad de argumentar, los niños recurran a aquello que han aprendido en las actividades anteriores que les permite determinar tres zonas, es decir caracterizar puntos interiores, pertenecientes y exteriores a una circunferencia, aunque no lo formulen de este modo.

En esta fase se intenta promover justificaciones de los alumnos que permitan reconocer los puntos del rectángulo que están a 4 cm del centro a partir del reconocimiento de las propiedades del radio, de la circunferencia y del círculo. El reconocimiento de dichas propiedades estudiadas a partir de las actividades anteriores les permitirá reconocer en esta fase colectiva que no es necesario “medir para saber”.

Se espera que los niños puedan utilizar expresiones como las siguientes: “No hace falta medir para saber, todos estos puntos –señalando los del arco- están a 4 cm y entonces van de verde”, “los que están afuera del círculo ya sabemos que miden más de cuatro”, “los de adentro miden menos de 4 cm”, etc.

Síntesis de la segunda parte:

Se realiza una síntesis de lo trabajado en las actividades de la segunda parte. El docente seleccionará la manera que crea más conveniente para sintetizar y registrar las conclusiones.

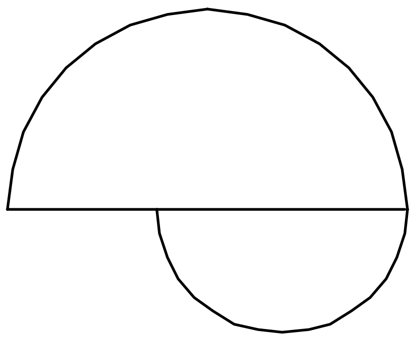
TERCERA PARTE: CONSTRUCCIONES CON CIRCUNFERENCIAS

Objetivos:

- Establecer relaciones entre figuras geométricas
- Formular procedimientos de trazado
- Construir circunferencias y arcos de circunferencias a partir de instrucciones

Primera fase[35]

Materiales:
Por cada pareja de alumnos una figura (todas iguales). Hoja lisa, compás, regla graduada.



Consigna:

"Ahora van a tener que reproducir una figura, pero unos van a tener el modelo y otros no. Van a trabajar por grupos formados por dos parejas: la pareja 1 y la pareja 2 trabajan juntos y forman un grupo. La pareja 1 tiene una figura y tiene que escribir instrucciones para que la pareja 2 pueda hacer la figura igual a la que ellos tienen. La pareja 1 tiene que tratar de que la pareja 2 reciba toda la información que necesita para hacerla lo más parecida posible a la que la otra pareja tiene. Si la pareja 2 tiene dudas puede formularlas por escrito. Las respuestas de la pareja 1 también se entregan por escrito. Al terminar las parejas comparan si les quedó igual".

[35] Remitimos al lector al punto 3.1 del capítulo 1en donde se explica este tipo de actividades. Sugerimos asimismo la lectura del "Juego de Mensajes" aparecido en el Documento de la M.C.B.A "Taller de Resolución de Problemas" de Broitman ,C. e Itzcovich,H., 1991.

Desarrollo previsto de la clase:

Se trata de una actividad compleja y suele suceder que en la primera oportunidad los niños no alcanzan a comunicar todo lo necesario para reproducir la figura pues dan por sobreentendidas ciertas informaciones o no explicitan algunas relaciones entre los elementos de las figuras.

La actividad de elaboración de instrucciones exige a la pareja que dicta ponerse en el lugar de la otra pareja y seleccionar qué información transmitir y cómo hacerla. Las preguntas y respuestas por escrito colaborarán en el camino a la conceptualización de las características de las figuras.

También es posible que los niños para dar cierta información utilicen expresiones que no sean económicas o que no utilicen el vocabulario específico. Estos aspectos podrán ser tomados en la puesta en común comparando los diferentes mensajes de los grupos sobre la misma figura.

Al finalizar la construcción los niños comparan la figura realizada con la recibida. Se les pedirá a los niños que luego de comparar las producciones intenten identificar las diferencias y piensen "cómo podrían haber dictado para que saliera mejor". Posiblemente los niños discutan acerca de si las dificultades estuvieron en el dictado o en la interpretación de lo que les era dictado. Es posible que la pareja que escribió las instrucciones considere que la otra pareja no ha interpretado lo escrito, y que la pareja que construye la figura con las instrucciones considere a su vez que no son claras ni completas las instrucciones recibidas.

También puede ser que los niños no interpreten correctamente una instrucción correcta, o bien que "completen" una instrucción incompleta con supuestos comunes entre los grupos. El análisis sobre las diferencias entre las figuras y sobre los textos de las instrucciones alimenta la tarea de los niños para la segunda fase del problema.

Procedimientos de los alumnos:

Aparentemente este dibujo es muy sencillo. Sin embargo para poder transmitir correctamente las informaciones los alumnos deberán identificar:

- la apertura del compás para ambas semicircunferencias (las medidas de ambos radios)
- la ubicación del centro de la segunda con relación a la primera (el lugar dónde apoyar el compás)
- la posición de las semicircunferencias con relación al diámetro (una para "arriba" y la otra para "abajo")

Posiblemente los niños no tengan simultáneamente en cuenta todos estos aspectos. Si no considerasen la ubicación del centro de la segunda posiblemente las tracen concéntricas, si no explicitasen la ubicación podrían hacerlas "para el mismo lado" y si no dieran correctamente las medidas o la información acerca de que el diámetro de una es el doble del de la otra, los tamaños de las semicircunferencias variarían con respecto al original.

Puesta en común:

Se propone una puesta en común luego del primer dictado con el objetivo de analizar dificultades, comentar e interpretar las diferencias entre las figuras.

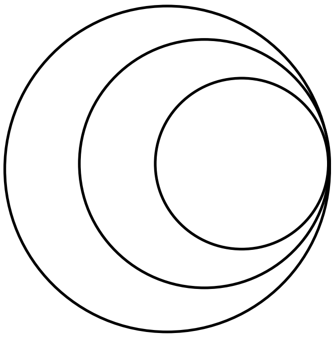
Como todas las parejas trabajaron sobre la misma figura se pueden leer algunas instrucciones y discutir colectivamente acerca de su precisión, del vocabulario, de la necesariedad de la información dada y de la insuficiencia de otras informaciones para poder llevar a cabo la tarea. Se comentarán cuáles fueron los pedidos de información por escrito y se sugerirá tenerlos en cuenta para próximos mensajes.

La puesta en común puede finalizar con ciertas "recomendaciones" acerca del dictado que serán reutilizadas en la segunda fase del problema o con la redacción colectiva de un mensaje completo y sintético.

Segunda fase

Materiales:

Por cada pareja de alumnos otra figura (todas iguales). Hoja lisa, compás, regla graduada.



Consigna:

"Ahora van a tener que hacer lo mismo que hicimos recién, pero esta vez las parejas que dibujaron escriben las instrucciones, y las parejas que hicieron las instrucciones tendrán que construir la figura. Tengan en cuenta lo que conversamos en la puesta en común para hacer mejor las instrucciones. Igual que antes pueden pedir y enviar información por escrito."

Desarrollo de la clase:

La actividad es la misma que la anterior pero se han intercambiado los roles de las parejas. En esta segunda fase es esperable que los niños perfeccionen sus dictados siendo más precisos en las instrucciones dadas pues han incorporado algunos de los aportes de la discusión anterior.

Es muy importante en esta actividad que todos los niños hayan pasado por los diferentes roles: elaborar instrucciones y construir la figura. Elaborar instrucciones exige ponerse de acuerdo en cómo formular de manera más clara posible las relaciones entre los elementos de la figura. Se pone en juego el vocabulario, la explicitación de las relaciones, la decisión acerca de por dónde considera que al otro le conviene iniciar la tarea de construcción, la toma de decisiones acerca de qué datos son necesarios y cuáles no. La actividad de construcción pone en juego dos aspectos diferentes: por un lado la interpretación de las instrucciones recibidas y por otro enfrenta a los niños con los problemas de construcción, exigiendo la toma de decisiones en el terreno de la acción.

Procedimientos de los alumnos:

Para poder transmitir el mensaje los alumnos deberán identificar en esta figura:

- las medidas de los radios de las tres circunferencias (cada radio es la mitad del radio de la mayor).
- la ubicación del centro de la segunda con relación a la primera y de la tercera con relación a la segunda (en este caso el centro de la menor está en la mitad del radio de la mayor).

Si los niños no tienen en cuenta estas informaciones seguramente pueden quedar de otros tamaños y en otras posiciones.

Posiblemente los niños den la información de que las circunferencias "se tocan" en un punto. Algunos niños con esta información considerarán innecesario explicar el lugar de ubicación del centro de la segunda circunferencia y otros lo plantearán a modo de control ("al terminar fíjense si les quedaron tocándose en un punto").

Es probable que los niños tengan en cuenta más elementos que en el mensaje anterior y el éxito en la comunicación del mensaje sea mayor en esta etapa.

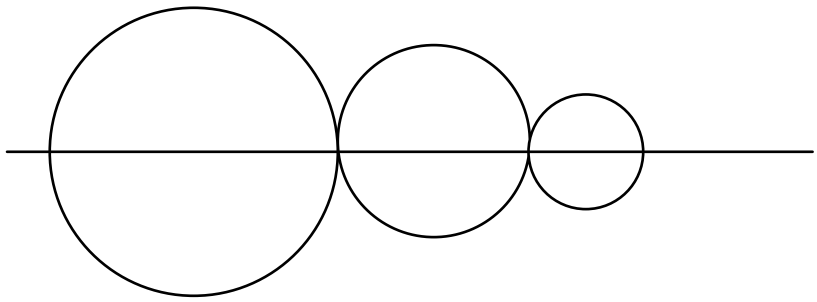
Puesta en común:

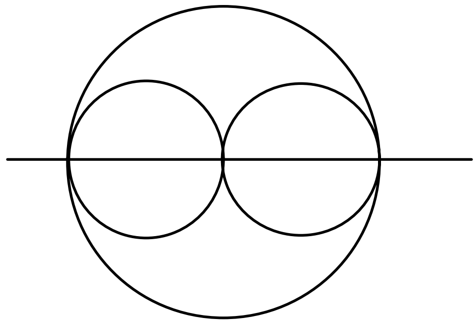
Se realiza nuevamente en forma colectiva el análisis de la figura. Se muestran los dibujos realizados por los grupos y se comentan las diferencias y las dificultades. Se intenta que los niños expliciten las relaciones entre los radios y diámetros de las tres circunferencias.

Se pueden leer algunas instrucciones y discutir colectivamente acerca del vocabulario, de la información dada y de la ausencia de otras informaciones. Se puede proponer la redacción colectiva de un mensaje completo y sintético que tome los aportes de los diferentes grupos y de los pedidos de información.

Nuevamente se plantean ciertas "recomendaciones" acerca del dictado que serán reutilizadas en nuevos mensajes.

Como hemos planteado en la primera parte este tipo de actividades permite iniciar a los niños en un tipo de actividad con relación a las figuras geométricas que precisa de varias instancias de trabajo. Proponemos rehacer todas las fases de esta actividad con estas dos figuras.





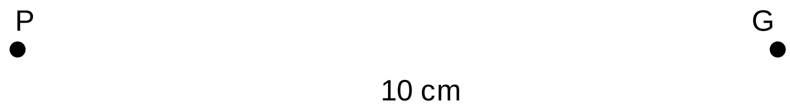
CUARTA PARTE: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Actividad 1

Objetivo: Concebir un conjunto de puntos que debe cumplir simultáneamente dos condiciones, relativas a la noción de distancia.

Materiales:

Una fotocopia por alumno con un esquema en el que hay marcados dos puntos (P y G) a 10 cm de distancia. Regla, compás



Consigna:

"Este es un esquema de un juego para hacer en el patio. En este esquema, cada centímetro representa 1 metro. Los puntos P y G representan los refugios de los dos equipos ('perros' y 'gatos'). El tesoro está a 10 metros del refugio de los 'perros' y a 10 metros del refugio de los 'gatos'. Ustedes tienen que marcar en el esquema los lugares donde se puede encontrar el tesoro."

Procedimientos de los alumnos:[36]

Es probable que, en un primer momento, algunos niños tracen segmentos de 10 cm a partir de cada uno de los puntos y les cueste comprender que deben buscar puntos que estén simultáneamente a 10 cm de cada uno de los puntos.

Puede ser que otros niños, para buscar un punto que cumpla con las dos condiciones, utilicen dos reglas y las hagan rotar. En ese caso estarían utilizando las dos reglas como compás. Notemos que, si los alumnos usan las dos reglas, o trazan segmentos a partir de uno de los puntos y rotando la regla buscan un punto de intersección, considerarán el problema resuelto al haber hallado un punto.

---

[36] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

En otras palabras, la utilización de procedimientos de búsqueda a partir de reglas o segmentos no los lleva a considerar el conjunto de todos los puntos posibles que cumplen cada una de las condiciones para luego pensar en su intersección. Si el procedimiento de las dos reglas conduce a los niños a una solución será interesante que el docente sugiera la búsqueda de otros puntos posibles.

Otro procedimiento posible es utilizar el compás para trazar correctamente las circunferencias determinando el conjunto de puntos que cumplen separadamente cada condición. Es importante señalar que este procedimiento no implica el reconocimiento de cuáles son los puntos que cumplen simultáneamente con ambas condiciones. Es decir puede ocurrir que hayan trazado las circunferencias pero no logren decir en dónde puede estar el tesoro.

Algunos alumnos reconocerán a partir del trazado de las circunferencias los dos puntos de intersección como lugares donde puede estar el tesoro.

Puesta en común:

Al igual que con las otras actividades se inicia la puesta en común cuando los niños dicen haber resuelto el problema sin que esto signifique que todos lo han resuelto correctamente.

El docente muestra las diferentes respuestas al problema de los alumnos y promueve una discusión ¿Qué piensan de estas soluciones? ¿Son éstos todos los puntos posibles? ¿Hay algunos otros?, etc.

En esta fase colectiva se analizará cuáles son los "puntos del tesoro" que cumplen simultáneamente las dos condiciones. Para establecer cuáles son esos puntos se puede analizar cada condición por separado y luego buscar la intersección.

También en este momento se compararán los procedimientos con reglas con el procedimiento del compás estableciendo que ambos son posibles pero que en los primeros resulta un poco más difícil de manipular y no conduce de entrada a las dos soluciones del problema.

<u>Actividad 2</u>

Objetivo: Reinvertir la búsqueda de puntos que cumplen con dos condiciones de distancia de dos puntos dados

Materiales:

Una fotocopia por alumno con un esquema en el que hay marcados dos puntos (P y G) a 10 cm de distancia.

Regla, compás.

Consigna:

"Este es otro esquema del mismo juego. P y G representan los refugios de los dos equipos. El tesoro está a 10 metros del refugio de los 'perros' y a 7 metros del refugio de los 'gatos'. Ustedes tienen que marcar también en este esquema los lugares donde se puede encontrar el tesoro".

P G

Desarrollo previsto de la clase:

Esta actividad tiene por objetivo posibilitar la reutilización de los conocimientos elaborados en la actividad anterior, a la vez que el problema se modifica en tanto que las distancias de las posibles ubicaciones del tesoro a cada uno de los "refugios" no es la misma.

Nuevamente el problema tiene dos soluciones que los niños descubrirán si trazan los puntos que cumplen cada una de las condiciones y luego además reconocen cuáles son los puntos de intersección.

Puede ocurrir nuevamente que algunos niños tracen las dos circunferencias, pero que no reconozcan cuáles son los puntos en los que se puede ubicar el tesoro.

Puesta en común:

En esta fase colectiva se retomarán los aspectos resaltados en la actividad anterior señalando las diferencias.

<u>**Actividad 3**</u>

Objetivo: Reinvertir lo aprendido en un problema sin solución.

Materiales:

Una fotocopia por alumno con un esquema en el que hay marcados dos puntos (P y G) a 10 cm de distancia.

Regla, compás.

Consigna:

"Nuevamente hubo cambios en la consigna para encontrar el tesoro. Se encuentra a 5 cm de P y a 3 cm de G. Tienen que marcar las posibles ubicaciones del tesoro".

P G

Procedimientos de los alumnos:[37]

En principio los niños podrán usar estrategias similares a las invertidas en las dos actividades anteriores, es posible que en este momento casi todos los niños decidan trazar ambas circunferencias.

Al hacerlo descubrirán que no se cortan en ningún punto. Sin embargo deberán ser capaces de interpretar en términos del problema el hecho de que las circunferencias en cuestión no se cortan. Muchas veces los niños, frente a un problema sin solución, tienen dificultades para discernir si el problema no tiene solución o si ellos no la pueden encontrar. La manera de dirimir esta cuestión en este problema es llegar a establecer la incompatibilidad de las dos condiciones.

---

[37] Sugerimos acompañar la lectura de este punto con los registros de los procedimientos de los niños planteados en la sección "Instantáneas del aula".

Puesta en común:

Se realizará un análisis de las dos condiciones del problema. Posiblemente los niños digan que no pudieron encontrar el tesoro. Se intentará que los niños puedan pasar de decir que a ellos “no les salió” a que “no hay puntos posibles”.

El maestro preguntará cómo podemos estar seguros de que no hay ningún lugar posible para el tesoro. Se espera que los niños puedan enunciar expresiones del tipo: “no puede haber ningún lugar para el tesoro porque no se juntan” o “porque no hay ningún punto que esté a 5 cm del refugio de los perros y a 3 cm del refugio de los gatos”.

Puede plantearse a los alumnos la pregunta acerca de qué otras condiciones no podrían cumplirse simultáneamente. Se espera que los niños puedan anticipar con algunos otros números en los cuales la suma de los mismos es menor que la distancia entre los puntos aunque no es esperable en este grado que los niños logren formular una regla explícita para todos los casos. Se espera que los niños puedan formular expresiones como las siguientes: “si los refugios están separados 8 cm el tesoro no puede estar a 1 y 2 cm porque no llegan, es muy poco para que se junten”.

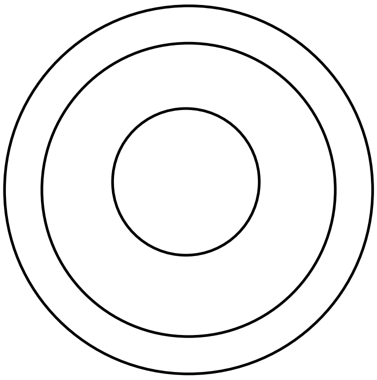
Síntesis de la cuarta parte:

Se realiza una síntesis de lo trabajado en estas actividades de la cuarta parte y se registran las conclusiones por escrito de la manera que cada docente crea más conveniente para continuar con el trabajo hacia la construcción de triángulos con compás a partir de las medidas de sus lados.

ANEXOS SECUENCIA GEOMETRIA 4° GRADO

Anexo 1 : correspondiente a la actividad 1 de la primera parte:

Figura 1



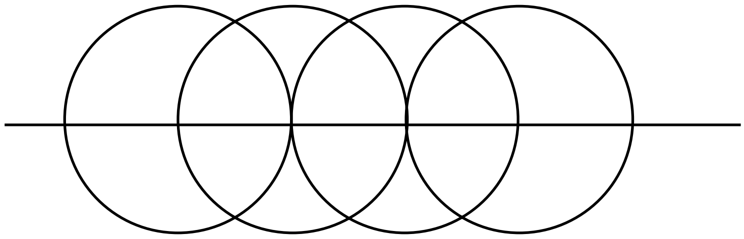
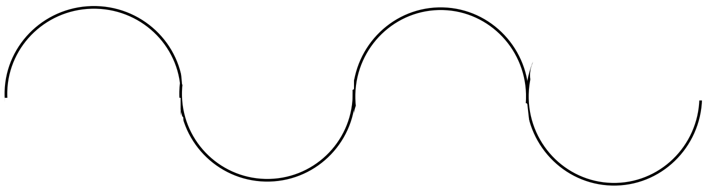
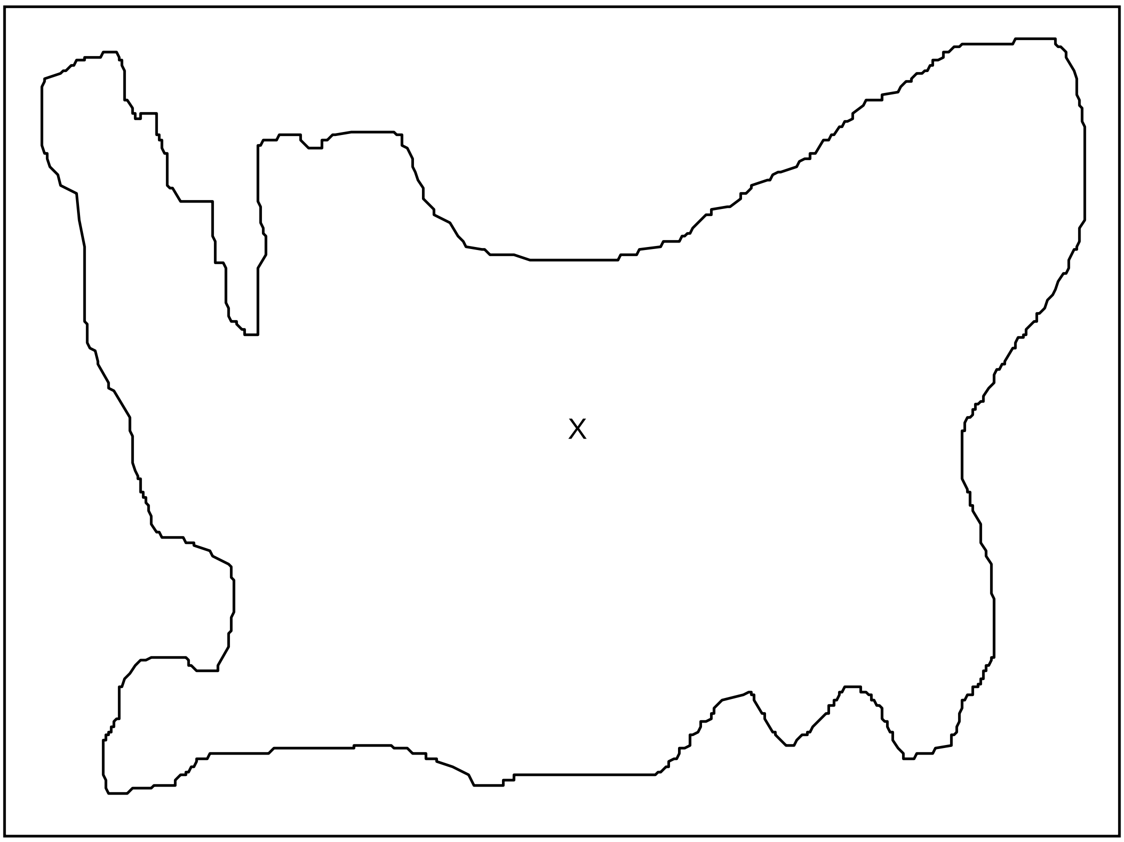


figura 2

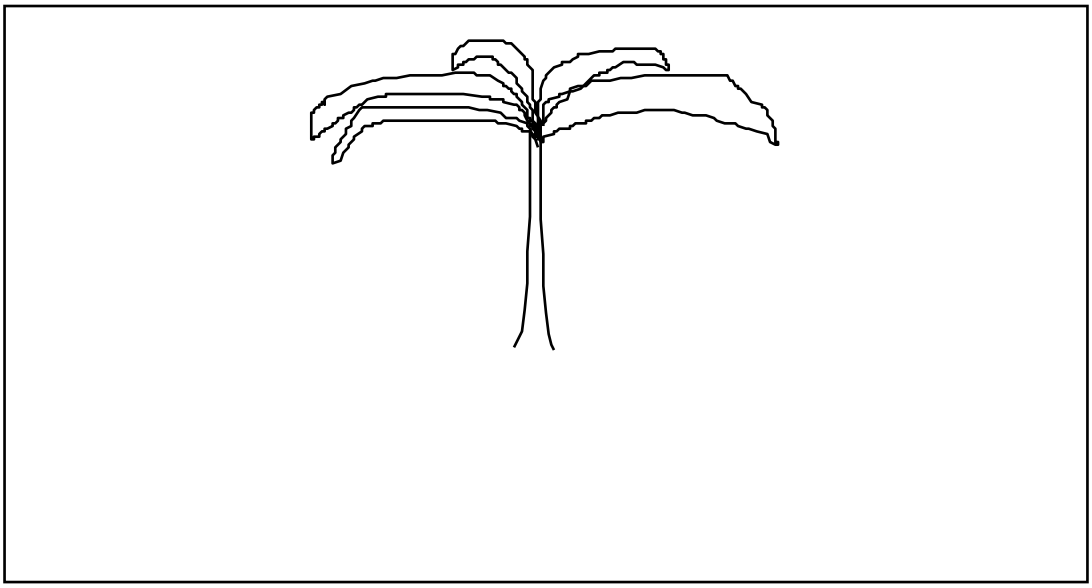
figura 3



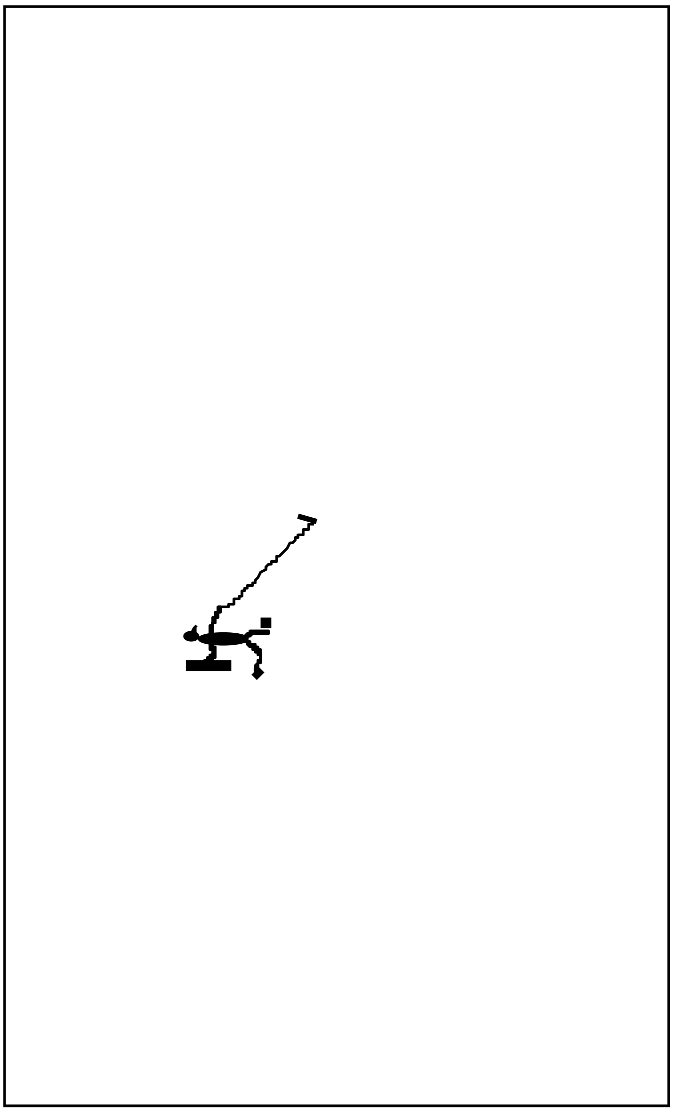
Anexo 2 : correspondiente a la actividad 1 de la segunda parte :



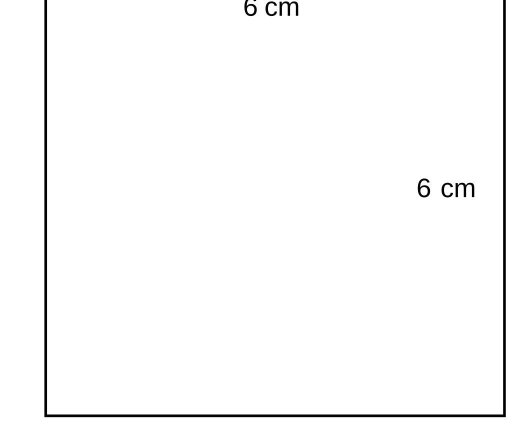
Anexo 3: correspondiente a la actividad 2 de la segunda parte:



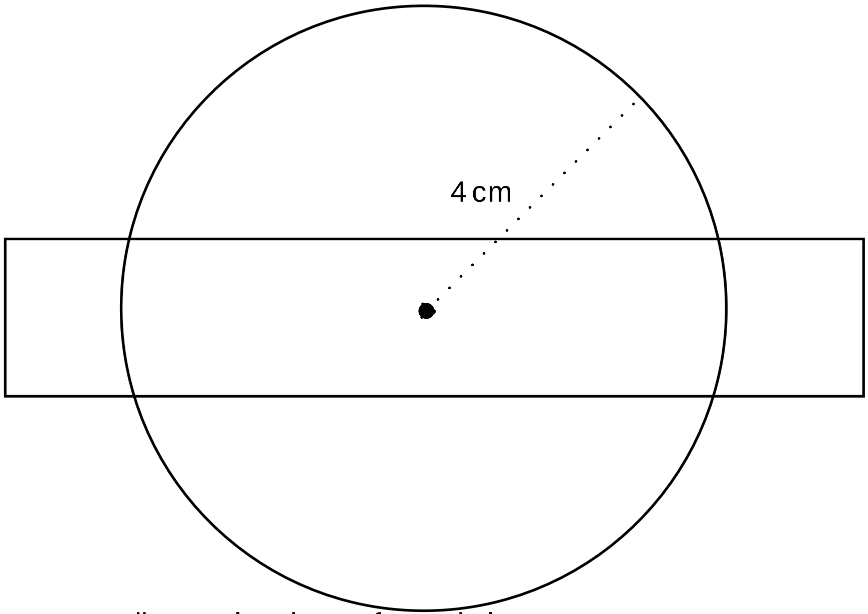
Anexo 4 : correspondiente a la actividad 3 de la segunda parte :



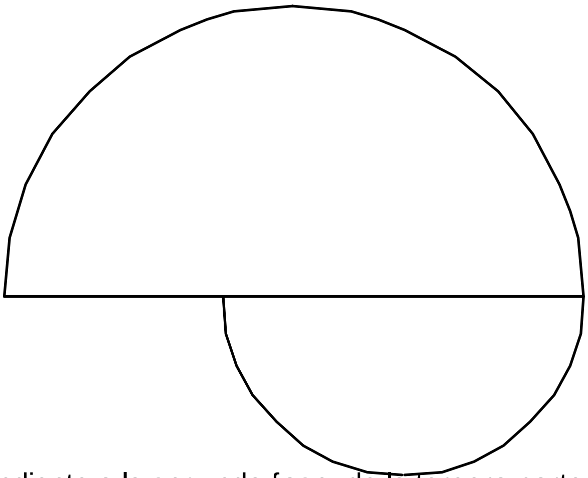
Anexo 5 : correspondiente a la actividad 5 de la segunda parte :



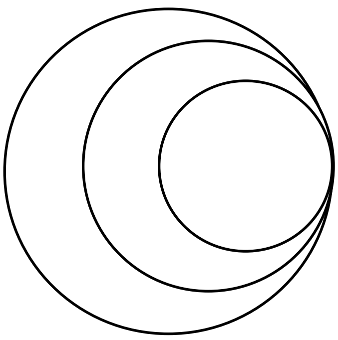
Anexo 6 : correspondiente a la actividad 6 de la segunda parte :



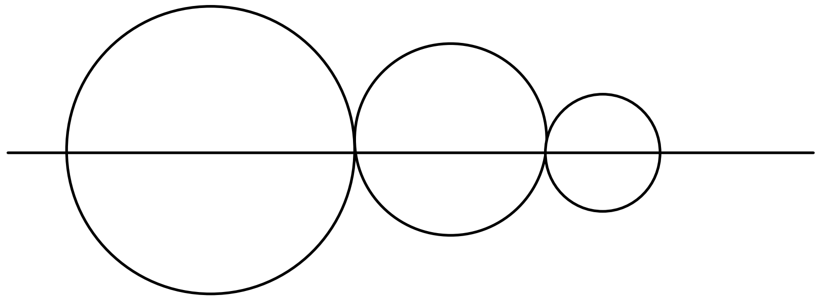
Anexo 7 : correspondiente a la primera fase de la tercera parte :

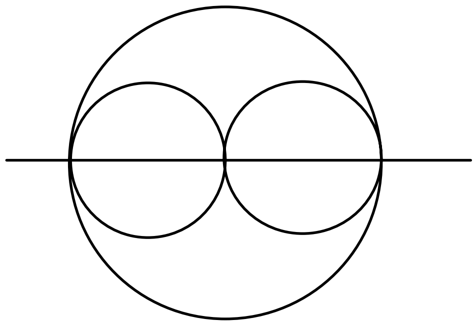


Anexo 8 : correspondiente a la segunda fase de la tercera parte :



Anexo 9 : correspondiente a la última actividad de la tercera parte :





INSTANTÁNEAS DEL AULA
(DE ALGUNAS ACTIVIDADES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CUARTO GRADO)

PRIMERA PARTE: EL USO DEL COMPÁS

Actividad 1: Usar el compás como instrumento para trazar circunferencias y arcos de circunferencia.

Algunos niños suelen tener bastantes dificultades para determinar la abertura del compás para el copiado de circunferencias. Erika por ejemplo toma la medida del radio eligiendo "a ojo" el centro de la circunferencia. Luego apoya el compás en su hoja blanca y va dibujando algo parecido a la circunferencia moviendo el lápiz del compás manualmente.

Erika: - Yo me "quedo cuidando que no se me vaya" (refiriéndose a que trata de "dibujar" una circunferencia)

Ingrid explica cómo ella hizo una circunferencia "igual" a otra:

Ingrid: - Yo apoyo el compás en el punto medio del círculo y con el compás hago un círculo imaginario (para controlar que esté bien elegido el centro) y me fijo si está bien.

En la actividad de copiado varios alumnos toman la medida del diámetro con el compás, y dejan esa abertura para trazar una circunferencia, es decir usan la medida del diámetro como radio. Luego del trazado se sorprenden de que no les quede igual que el original. Veamos cómo reacciona esta nena:

Ma: - ¿Te quedó igual?
Al: - Me quedó igualito ¡pero más grande!
Ma: -¿Cómo podrías hacerlo igual?
La nena vuelve a intentarlo y esta vez –aunque a ojo- toma la medida del radio.
Al: -Esta vez me quedó igual.

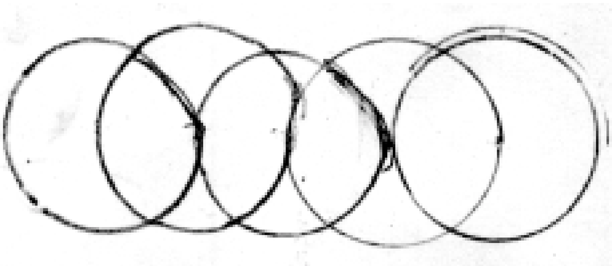
Para la segunda figura Fabián traza primero la recta, toma la medida del radio de una de las circunferencias de la figura modelo con el compás, prueba sobre las otras circunferencias si se mantiene la misma medida, y una vez que lo verifica procede al trazado de las mismas en su hoja. En primer lugar traza tres circunferencias una al lado de la otra y luego las dos superpuestas.

Claudelina realiza el mismo procedimiento que Fabiana, pero nota que las tres primeras circunferencias le quedan separadas y explica:

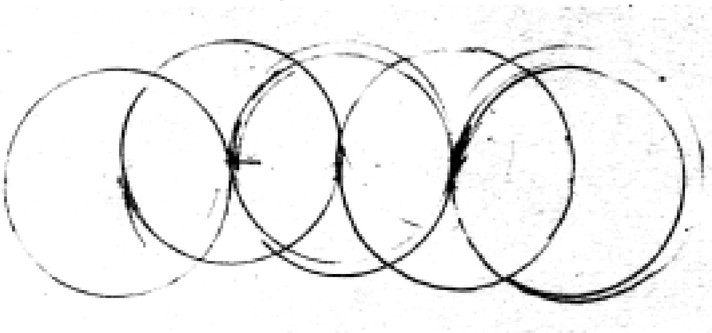
Claudelina:- No me salió bien, miro arriba (las del modelo) y después miro abajo (las propias). Están más separadas.

Borra las circunferencias y rehace su figura, pero esta vez controla que no le queden espacios entre las circunferencias.

Otros niños logran que les queden “pegadas” pero no controlan que las circunferencias sean de la misma medida.



Muchos niños realizan el copiado sin controlar la alineación de las circunferencias obteniendo figuras como estas:



Luego de que en la puesta en común muchos niños mostraron sus producciones –la mayoría “torcidas”– la maestra hace pasar a María Inés al pizarrón quien explica:

M. Inés: -Yo hice primero una raya. Después hice un puntito en la línea y un círculo, otro puntito, otro círculo. .
Ma: ¿Qué les parece esta forma de hacerlo que usó María Inés?
Al: - Así te queda todo marcado (refiriéndose a que con cada punto se determinaba una circunferencia).
Al: - La de arriba (refiriéndose al copiado un poco torcido que había quedado en el pizarrón luego de que algunos chicos explicaron sus procedimientos sin controlar la alineación de las circunferencias) quedó chueca y la de abajo está derecha.

Se discute acerca de si “valía” hacer una recta y después borrarla. Muchos chicos dicen que no se podía. Finalmente la maestra plantea que se acepta como posible para ésta u otras construcciones trazar algo auxiliar y luego borrarlo.

Para la tercera figura Jaqueline mide la abertura de la semicircunferencia “a ojo” pero no controla que efectivamente ese punto sea el centro. Con dicha abertura del compás traza la primera semicircunferencia. Luego vuelve a realizar lo mismo para la segunda semicircunferencia, pero cuando transporta la medida a su construcción se da cuenta de que no le va a quedar del mismo tamaño que la ya realizada. Decide priorizar que todas sus semicircunferencias sean iguales entre sí aun cuando no sean iguales al modelo. Entonces ajusta la abertura para que le queden iguales las suyas. Obtiene una cadena –no alineada- de semicircunferencias iguales entre sí, pero más grande que el modelo.

Algunos niños trazan antes de cada semicircunferencia su diámetro. Es decir no trazan una recta auxiliar inicialmente sobre la cual construir toda la figura y van alineando a ojo luego los diámetros obtenidos. Les queda una figura más alineada que a quienes no trazaron dichos segmentos, pero no controlan la alineación como aquellos pocos alumnos que trazaron la recta auxiliar inicialmente.

En la puesta en común sobre esta última figura se retoman diferentes dificultades que tuvieron los chicos:

- No tomar bien la medida del radio y entonces que quede una "viborita" pero de otro tamaño.
- No controlar que estén alineadas las semicircunferencias.

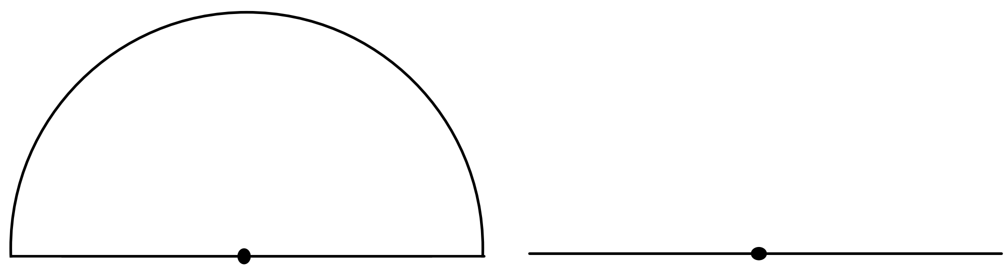
Se instala entonces en la clase la posibilidad de construir una recta auxiliar y luego borrarla cuando sea necesario.

Actividad 2: Usar el compás como instrumento para transportar la longitud de un segmento.

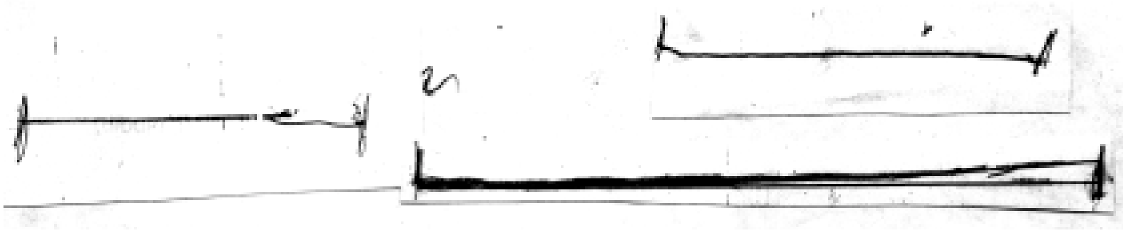
Fue bastante habitual que los niños se sorprendieran frente a la posibilidad de usar compás para trazar un segmento. Veamos qué dijeron los chicos de uno de los cuartos:

Ma: - ¿Observan esos segmento que les repartí? Ahora lo que hay que hacer es dibujarlos en la hoja en blanco de la misma medida. No pueden calcarlos. Pueden usar el compás....
Los chicos interrumpen la consigna a coro:
Als: - ¿Compááááás?

Algunos niños realizan semicircunferencias con la medida del segmento. Tal vez pensaron que si se podía usar el compás "algo redondo tenía que haber". Toman la medida del radio buscando un punto aproximadamente en el centro del segmento y trazan en su hoja una semicircunferencia con el diámetro horizontal. Luego borran la semicircunferencia y les queda el diámetro como segmento.



Algunos niños intentan hacer un segmento "a ojo" usando el compás como lápiz. Pinchan el compás y desplazan la otra parte del compás tratando de producir una porción de recta. Les quedan dibujos como este:



Otros niños usan la regla no graduada para trazar rectas y después marcan un punto en la recta para determinar “a ojo” uno de los extremos del segmento. Obviamente este “método” no les permite controlar en absoluto la longitud del segmento. Sin embargo para muchos chicos parece suficiente que sea al menos “parecido”.

Ma: -¿Cómo sabés que este segmento es igual que el otro?
Al: -Yo “mido con el ojo” y después “pienso” que me salga igual.

Erika explica también su procedimiento de “medir con el ojo”.

Erika: - Yo miré bien con la regla, no hice marquitas, pero me fijaba bien hasta dónde llegaba y luego hice otra igual acordándome de dónde estaba.

Este otro alumno también usó la regla no graduada y el compás pero no transportó la medida:

Ma: -A ver Manuel ¿qué hiciste?
Manuel: -Primero agarré el compás y puse la regla y usé el compás.
Ma: -¿Y cómo sabés que es igual?

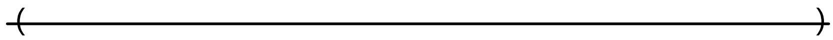
En estos casos en los que los niños se “conforman” con que la medida sea aproximadamente la misma es muy importante que el docente ponga en duda la igualdad o recuerde a los alumnos que deben superponerlos para ver si les quedaron iguales. A partir de la pregunta que la maestra le hace a Manuel, éste superpone los segmentos y verifica que no son iguales. Vuelve a intentarlo.

La maestra para la puesta en común traza en el pizarrón un segmento “grande” y les dice a sus alumnos:

Ma: -Vamos a ver cómo lo pudieron lograr. Pasá Nahuel.
Nahuel : - Puse el compás en el medio.
Ma: -¿Cómo sabés que es el medio?
Nahuel: - Iba probando. (Explica su procedimiento de hacer semicircunferencias pero a partir de la pregunta de la maestra acepta no estar muy seguro ahora de que fuera el medio).

Otra nena explica cómo lo hizo:

Al: - Yo me fijaba con el compás la medida, pinchaba en la hoja y hacía una rayita (refiriéndose a un arco), luego apoyaba en la rayita y hacía otra rayita, después hacía el segmento.



Otra niña comenta su procedimiento que consiste en trazar primero una recta sobre la cual trazar el segmento:

Al: - Yo hice una línea, luego medía con el compás y luego cortaba. Después probaba con la otra punta a ver si daba. Me fijaba en el segmento si era así.

Luego de que se analizan los diferentes procedimientos la maestra pregunta:

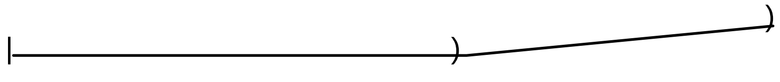
Ma: - ¿Para qué usamos el compás la clase pasada?
Al: - Para hacer circunferencias.
Ma: - ¿Y hoy?
Otro Al: - Para hacer segmentos, para medir.
Ma: - ¿Qué diferencia hay entre llevar una medida con el compás y con una regla?
Otro Al: - Con la regla es más exacto.
Otro Al: - Con la regla usás los números.
Otro Al: - Con el compás no usás los números.

Se retoma entonces al final de la clase la sorpresa inicial de los niños de usar el compás para hacer segmentos. Un alumno comenta entonces:

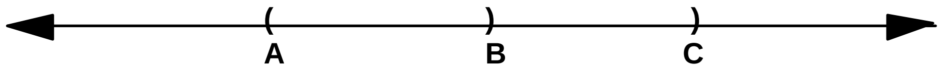
Al: - Yo hoy aprendí que el compás sirve no solo para trazar circunferencias sino también para transportar segmentos.

Actividad 3: Usar el compás como instrumento para duplicar la longitud de un segmento.

En esta actividad muchos niños trazan un segmento, y luego a partir de uno de sus extremos trazan otro igual, intentan "a ojo" que les quede derecho, pero no pueden asegurar la alineación de ambos y obtienen producciones como estas:



Otros niños trazan una recta auxiliar y sobre ella marcan los dos segmentos iguales de tal manera que les queda efectivamente un segmento del doble de longitud.



Para que los niños puedan controlar que la longitud sea el doble de la del segmento dado, precisan realizar una superposición de los dos segmentos, por eso se verifica de a parejas. Y deben controlar la alineación apoyando la construcción sobre una regla no graduada.

SEGUNDA PARTE: CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Actividad 1: **Definir la circunferencia como conjunto de puntos que equidistan de un centro**

Los chicos inician la búsqueda de los puntos en dónde puede estar el tesoro utilizando la regla. Algunos chicos dibujan en sus hojas a partir de la cruz varios segmentos con diferentes direcciones y marcan al final de cada uno un punto como solución al problema. Muchos compiten por la cantidad de puntos encontrados:

Al: -¡16!
Otro Al: -¡21!
Otro Al: -¡24!
Otro Al: -¡103!

Un nene que ya "descubrió" que con el compás se podía hacer les dice a sus compañeros:

Al: - ¡¡Es poco, es poco!!

Una nena marca usando la regla dos puntos y se da el siguiente diálogo con su maestra:

Al: -Ya terminé.
Ma: - Fijáte si encontrás otros más.

La alumna empieza a marcar nuevos puntos y descubre que se le va formando un arco de circunferencia con los puntos señalados.

Veamos cómo algunos chicos que están realizando la tarea de señalar punto por punto realizan el "descubrimiento" de que se trata de una circunferencia.

Un nene ha marcado tres o cuatro puntos con la regla y dice:

Al: - ¡Ah! Ya entiendo, en todo el círculo (refiriéndose a la circunferencia) puede estar el tesoro, en todos estos puntos (señalando con el dedo una circunferencia).

Rodrigo dice:

-Está en algún punto de la circunferencia porque están a 5 cm de la cruz. No pueden estar adentro, tienen que estar justo en el borde. Hice la circunferencia para saber justo 5 cm.

Otros alumnos dialogan:

Al: - No nos dicen para qué lado tenemos que ir, entonces es para todos lados.
Otro Al: - Te dan un camino, pero no te dan la dirección, entonces va a ser una circunferencia.
Otro Al: - ¡Este problema está buenísimo!

En la puesta en común la maestra propone ver las diferentes respuestas al problema. Es importante en este caso que se comenten en primer lugar las producciones de los niños que sólo han encontrado algunos puntos, es decir que han resuelto parcialmente el problema. Pasa una nena al pizarrón y explica cómo hizo para trazar varios puntos. Una compañera dice que ella encontró más puntos y los agrega. Otro nene le dice a la nena que está en el pizarrón que no hace falta levantar la regla, que moviéndola podés hacer más rápido muchos puntos. Un niño sintetiza cómo se usa la regla:

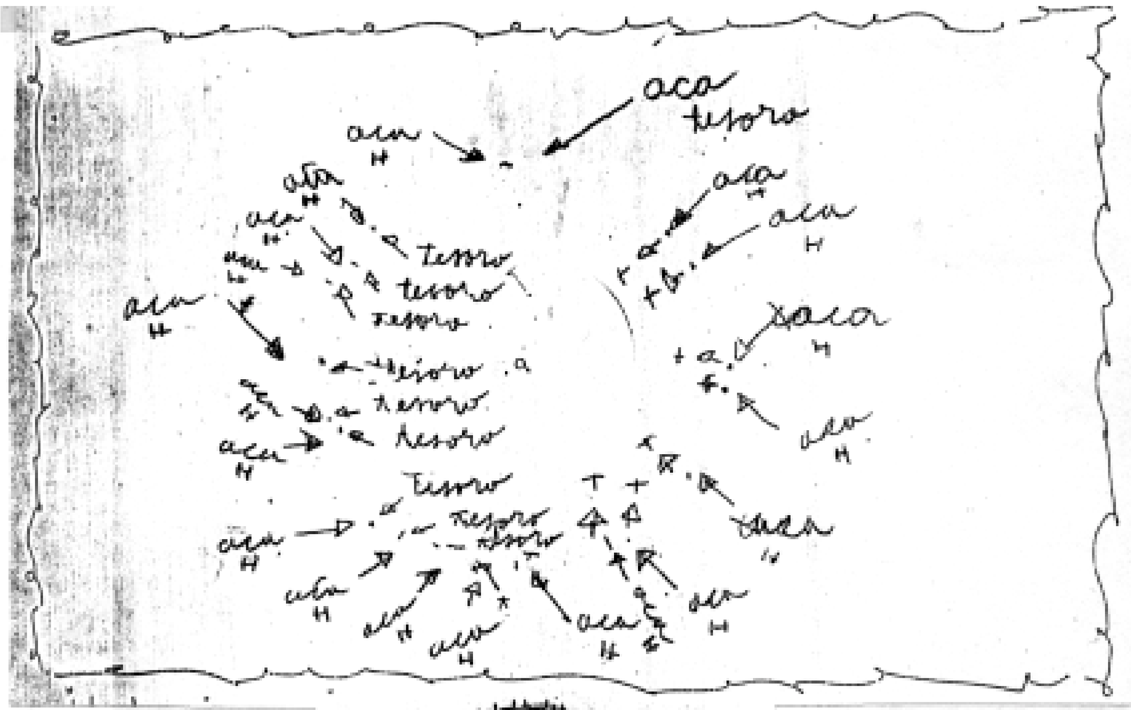
Al: - La regla puede trabajar como un compás.

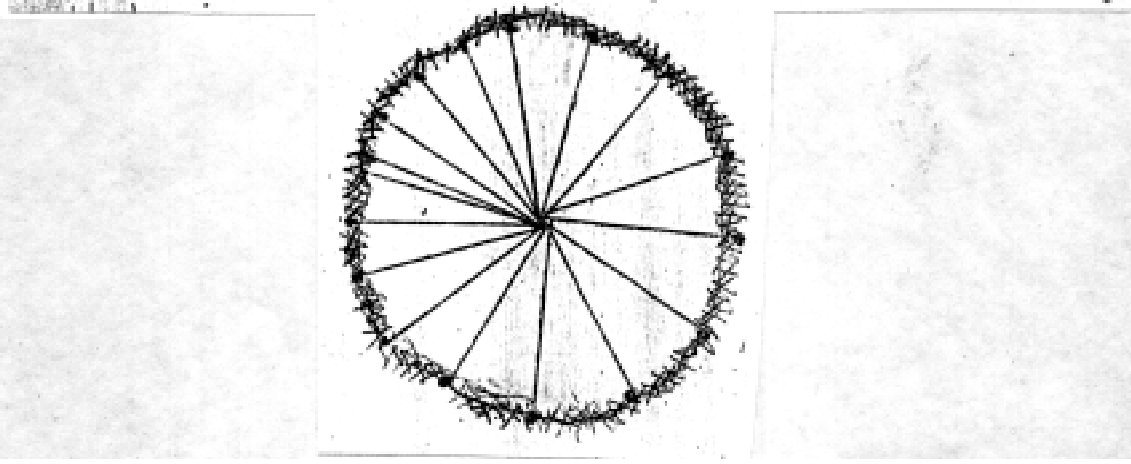
En el pizarrón, a medida que varios niños explican lo que hicieron y cuáles puntos encontraron, se va completando algo que se aproxima a una circunferencia.

Otros niños muestran que hicieron la circunferencia. La realizan en el pizarrón. La docente pregunta a los niños qué tienen en común todos esos puntos de la circunferencia.

Evidentemente a los alumnos no les es sencillo abandonar la búsqueda de punto por punto y "confiar" en que con el compás se pueden señalar "todos" los puntos que cumplen con la condición de equidistancia al centro.

En esta actividad, como vemos -a diferencia de las de copiado de figuras y de segmentos que se validan por superposición con el modelo-, es a través de la puesta en común que los niños tendrán la oportunidad de analizar lo realizado y de discutir acerca de las diferentes soluciones encontradas al problema.





Actividad 2: Definir el círculo como el conjunto de puntos cuya distancia a un centro es menor o igual que el radio.

En las clases observadas en general los niños suponían que el problema era igual que el anterior y rápidamente utilizaban el compás para determinar una circunferencia. Es decir reconocían el compás como un instrumento que permite señalar todos los puntos que están a igual distancia del centro, pero no lograban resolver inicialmente la tarea de encontrar los puntos que estuvieran a menor distancia que el radio.

Fue habitual escuchar a varios chicos considerar que habían finalizado la tarea con sólo haber marcado la circunferencia.

Al: -¡¡Ya está!!
Otro Al: -¡¡Terminé!!

Fue necesario entonces que los maestros preguntaran si había otros puntos posibles además de los señalados y que volvieran a decir la consigna reforzando que fuera a igual o menor distancia de 3 cm.

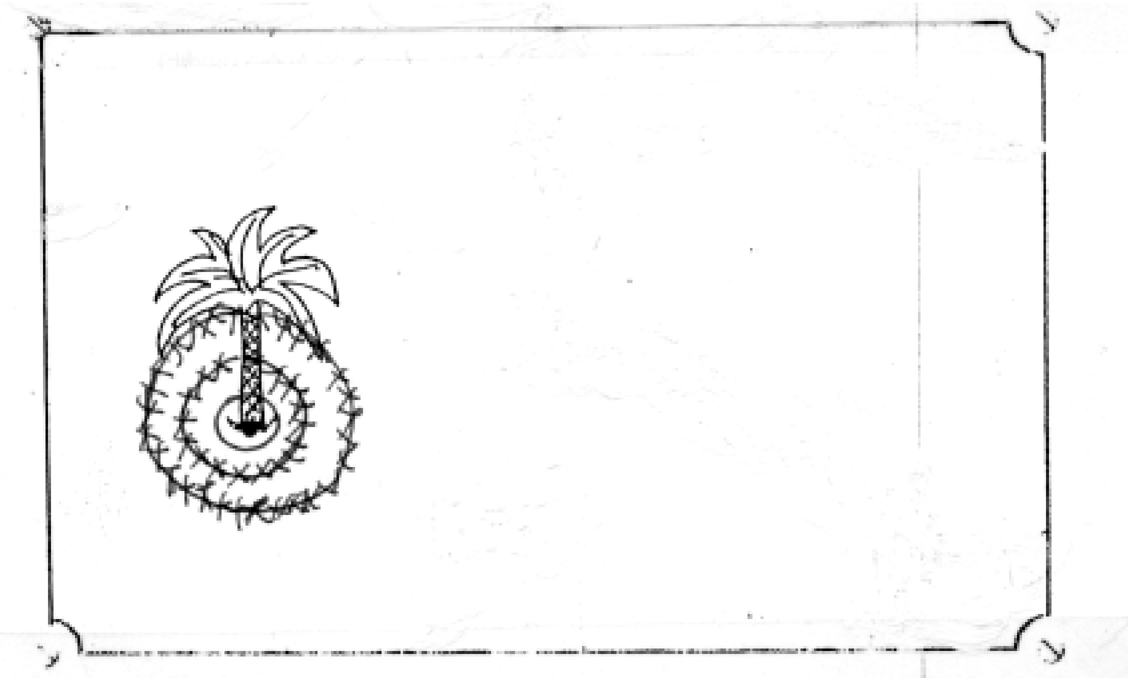
Ma:- ¿Y a menos que 3 cm?
Al:- ¿Puede ser a 1 cm?
Ma: -Sí.
Al: -¡Ah! Entonces hago así.

Este niño –igual que varios otros– al descubrir que puede ser "menos" que 3 cm, consideran que menos de 3 solamente puede ser 2 ó 1, pues están pensando en términos del campo de los números naturales que son los que ellos conocen.

Pablo expresa así su punto de vista:

Pablo: - Hice una circunferencia de 2 cm, porque 2 es menos que 3.

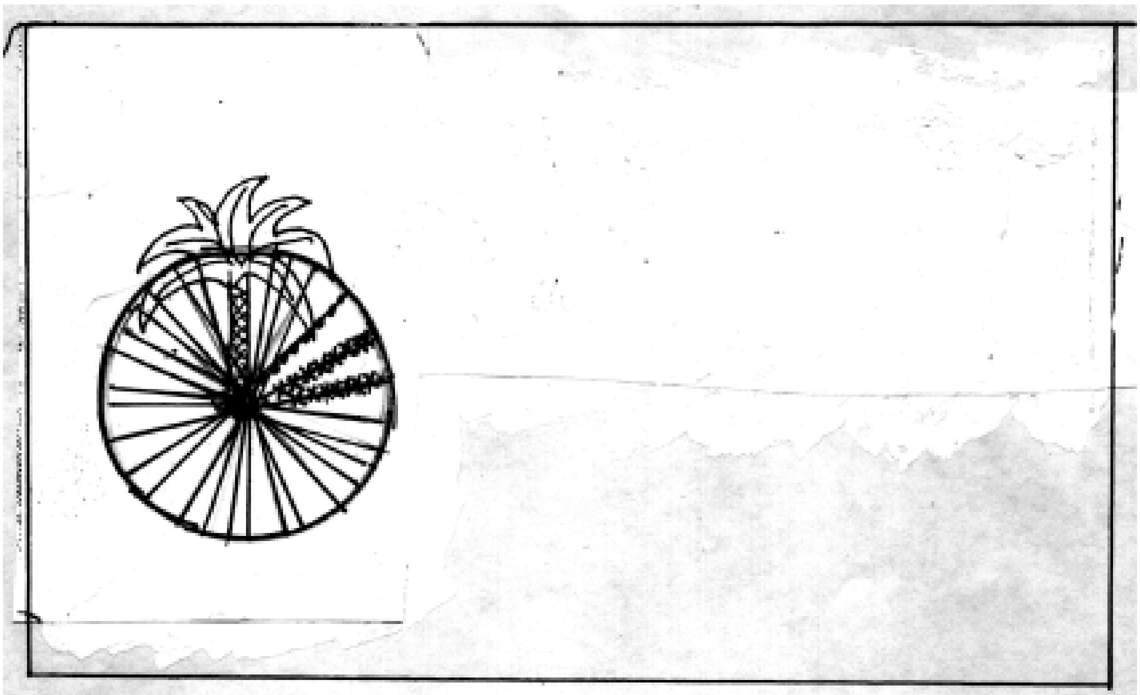
Varios niños entonces proponen soluciones al problema de este modo:

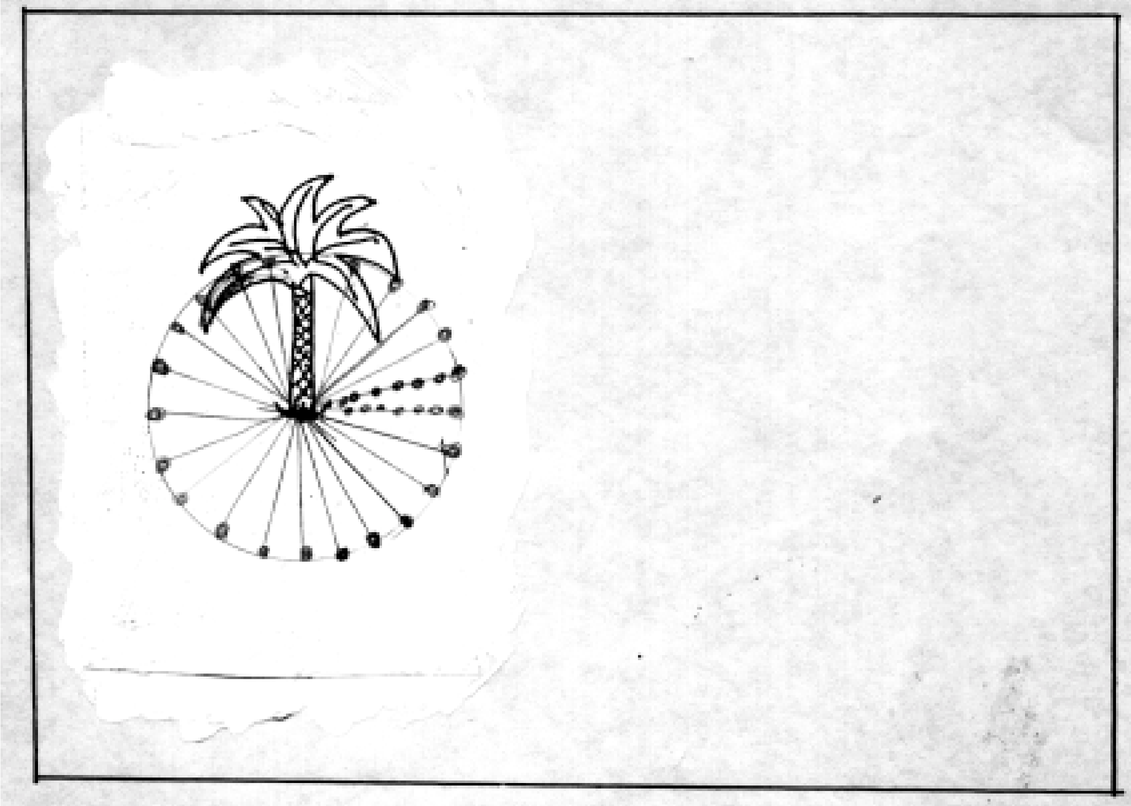


Ma: - ¿Hay algún otro punto que esté a menos de 3 cm además de éstos?

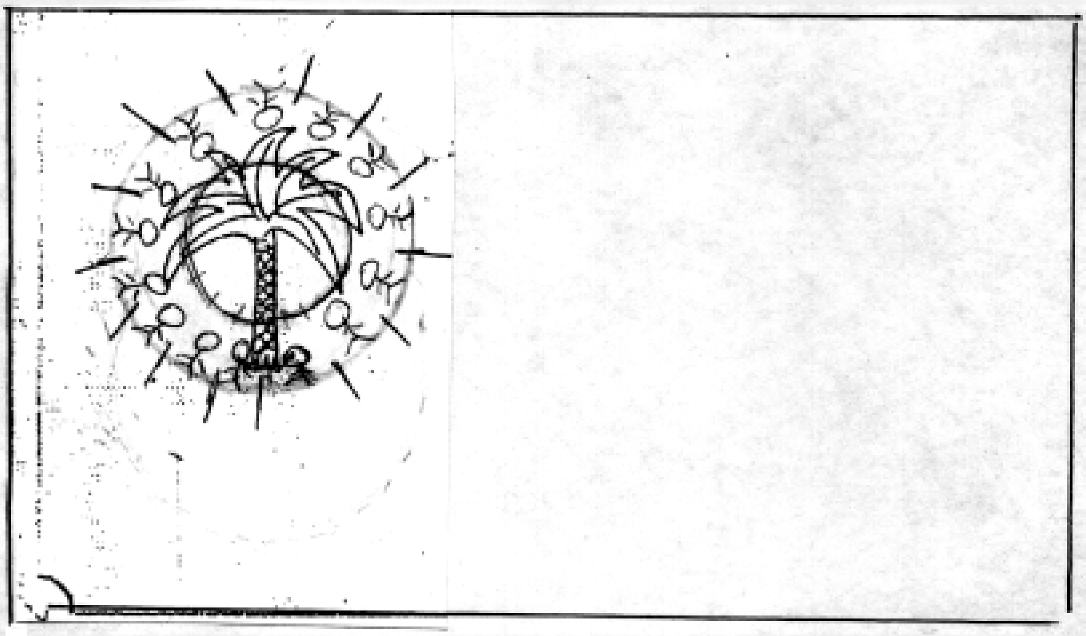
La alumna piensa, marca un radio y comienza a marcar puntos sobre dicho radio. Luego continúa con otro radio.

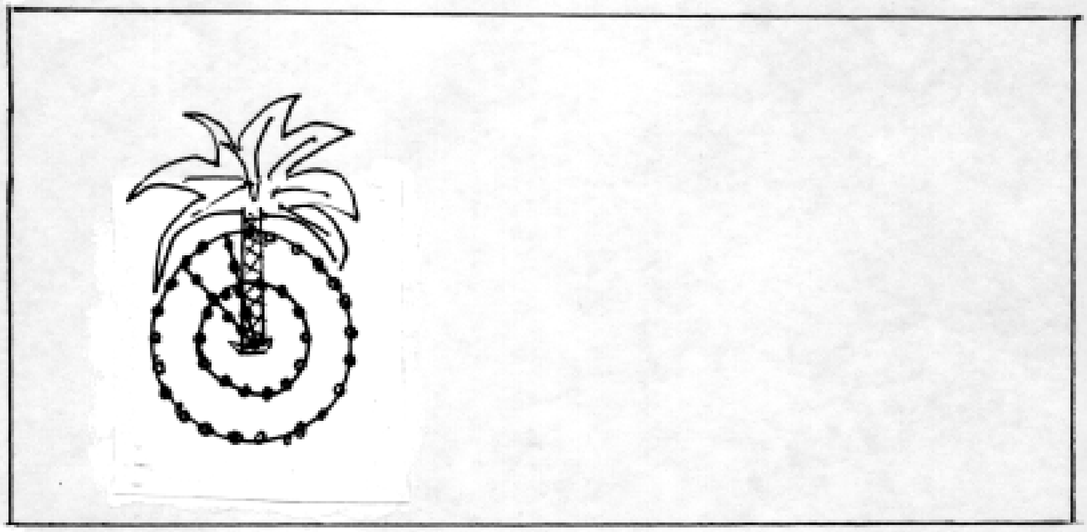
Varios niños utilizan el procedimiento de buscar más puntos a partir de marcar crucecitas en un radio.

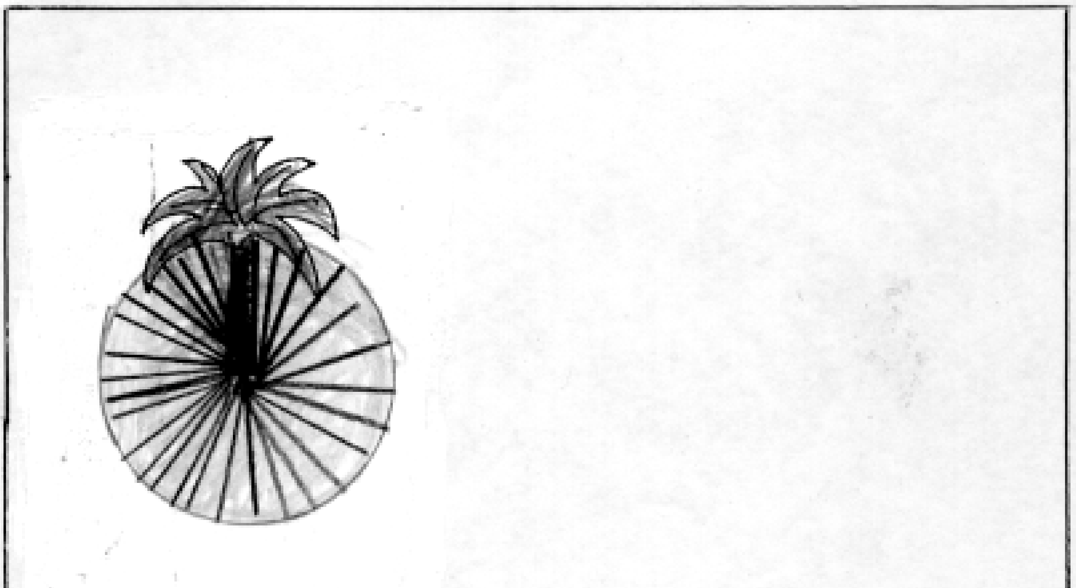




La mayoría de los niños ha dibujado circunferencias concéntricas y señalado puntos en ellas, dibujado radios próximos y marcado puntos de dichos segmentos o bien han combinado ambos procedimientos.







Sólo algunos pocos alumnos se han dado cuenta de que era posible resolver el problema pintando todo el círculo.

Por ejemplo Cecilia hizo una circunferencia.

Ma: -¿Cuál es la zona prohibida?
Cecilia: -Por adentro de la circunferencia.

Rodrigo también trazó una circunferencia y dice:

Rodrigo:- La zona prohibida es donde cae la circunferencia y adentro también.

Luego en la puesta en común:

Ma: - ¿Cómo hicieron para resolver este problema?
Al:- Yo marqué las circunferencias.
La maestra muestra las producciones de los niños que hicieron circunferencias concéntricas.
Ma: -¿Y los demás?
Otro Al: -Yo hice cruces así (mostrando los radios próximos).
Se muestran varios trabajos de los niños que han señalado varios radios con puntos o cruces.
Ma: - ¿Y los demás qué marcaron?
Varios niños muestran cómo fueron marcando los puntos y haciendo las cruces.
Nahuel: - ¡¡Yo pinté todo!! ¡Pintando todo!
Ma: - ¿Qué piensan de lo que hizo Nahuel?
Varios alumnos dicen que no e incluso un niño dice:
Al: -No está bien porque "había que hacerlo con cruces y líneas".

En la puesta en común vemos que los niños defienden sus producciones. Incluso un niño inventa una "regla" como si hubiera sido dada en la consigna: "había que hacerlo con cruces y líneas". Muchos alumnos no aceptan inmediatamente que pintar el círculo resuelva el problema. Como planteamos en la ficha didáctica el pasaje de circunferencia a círculo supone un salto de línea a superficie.

Se promueve una discusión en la que se resalta "cómo hacer para marcar todos los puntos y no sólo algunos". Algunos niños siguen "llenando" su zona con decenas de puntos más. Para los niños no es sencillo reconocer que han resuelto sólo parcialmente el problema al encontrar algunos puntos, y aceptar que no han encontrado "todos" los que cumplen con la consigna dada.

Frente a la propuesta de completar los puntos que les faltan hemos visto algunos niños que siguen marcando punto por punto. Esta complejidad hace que sea muy importante este momento de trabajo colectivo para que todos los chicos comprendan la solución al problema y no que "pinten" porque piensan que es lo que el maestro espera que hagan.

Actividad 4: Inventar procedimientos que reemplacen al compás para el trazado de circunferencias

La maestra da la consigna. Los chicos por grupos le piden metros, sogas, compás de pizarrón. Salen al patio y cada uno de los cuatro grupos trabaja en una esquina.

Un grupo mide la soga y un nene dice:

Al: -Mide un metro y 43 cm. ¿Podemos cortarla?
Ma: -Sí.
Los niños la cortan para que mida 1 metro. Un chico dice:

Al:- Yo la tengo.

Otro chico la toma de la otra punta. Comienzan a moverse los dos juntos. Uno le dice al otro:

Al: - Tenés que quedarte en el medio. No, no gires así (le muestra cómo girar en el lugar).

En otro grupo intentan formar una circunferencia con la soga en el aire sin recordar que se trata de trazarla sobre el piso dibujándola. Se les recuerda la consigna.

En el grupo de Gala, ésta sostiene un extremo de la soga con el brazo bien estirado y otra nena toma el otro extremo y se desplaza siguiendo una curva. Pero no se dan cuenta de que han agregado, al radio de la soga de un metro, la medida del brazo de la niña, y les queda la circunferencia más grande.

Matías para marcar y sostener el centro a pesar de los movimientos de la soga dice:
Matías: - Yo lo piso para que no se mueva.
Matías trata de cubrir la menor superficie de la soga posible sin que se le escape el pie. Más tarde dice que con el pie no puede porque no puede dar la vuelta. Lo reemplaza por el dedo.

En otro grupo primero trazan en el piso un segmento de 1 metro de longitud utilizando la cinta métrica. Luego intentan hacer la circunferencia con el compás de pizarrón. Los chicos lo abren al máximo, lo ponen arriba de la cinta métrica para medir la abertura. En el piso ponen el compás sobre uno de los extremos del segmento.

Al:- Mide 50 cm.

Intentan hacer marcas con el compás. Llegan a marcar varios puntos.

Al: -¡¡Es como en la fotocopia!! (refiriéndose a la actividad de buscar los puntos en los que puede estar el tesoro). Sigamos haciendo los puntos y se va a formar la circunferencia. Marcan varios puntos a 50 cm.
Al: -¡Uy! ¡Está mal!
Al: -¿Por qué?
Al:- Tiene que ser de 1 metro de radio y lo estamos marcando de 50 cm.
Al: -No nos sirve el compás.
Al: El radio es la mitad del diámetro (refiriéndose a que 50 cm es la mitad del que ellos debían marcar en el piso).

Abren nuevamente la cinta métrica hasta 100 cm, marcan con la tiza en el piso un punto. Un alumno tiene la cinta del extremo y el otro va girando suavemente el otro extremo. Otro alumno va marcando en el suelo con la tiza a medida que gira su compañero con suavidad.

Otro equipo elige otro procedimiento diferente. Cuentan luego cómo lo hicieron:

Al: -Primero marcamos una recta que mide 2 metros y en el centro de esa una que cruce que también mida 2 metros.
Otro Al: -Claro, porque 1 metro es el radio, 2 es el diámetro de la circunferencia.

Han marcado dos segmentos de 2 m aparentemente perpendiculares. En el punto donde se cruzan ambos segmentos apoyan el extremo de la cinta y van girando de a dos compañeros controlando que pase por el centro la soga de 2 metros. Van marcando el arco de la circunferencia para unir los 4 puntos que ya tenían determinados con la cruz.

Al rato terminan, se abrazan y gritan:

Als: -¡Lo logramos, lo logramos!
Al: -¡Fue re- fácil!
Al: - Sí, pero nos dio un poco de trabajo ir girando con la cinta, con el compás es más fácil.

Otro grupo discute su "plan" luego de contar que tuvieron que medir la soga y cortarla para que quede de 1 metro.

Al: -Desde este centro que marcamos tendríamos que ir viendo el radio para que se vayan formando puntos uno al lado del otro y así se formaría una circunferencia.
Otro Al:- Y por eso tiene que estar bien derecha la soga para que salga perfecta la circunferencia.

Deciden que un alumno tenga en el centro un extremo de la soga y que el otro vaya girando.

Al:- Tené bien derechita la soga.

Ya casi no se nota el centro marcado con la tiza. Una alumna lo advierte y hace una marca con una tiza de color más fuerte en el centro.

Al:- Vos marcá el centro cada vez que se empieza a borrar. Es lo más importante para poder hacer la circunferencia bien.

Al regreso al aula los niños comentan que no se podía con el compás porque medía 50 cm. Comentan que algunos usaron una soga de 1 metro como radio y otros la soga de 2 metros como diámetro.

También explican:

Al: -Tuvimos que cortar las sogas porque medían más de 1 metro.
Otro Al: -La soga tenía que estar bien tirante para que marque bien.
Otro Al: -Sin la soga nos salía para cualquier lado.

Los niños registran en sus carpetas las conclusiones acerca de "cómo se puede trazar una circunferencia sin compás". Algunos chicos escriben: "Hoy aprendimos que si uno quiere hacer una circunferencia muy grande puede usar diferentes elementos, como la soga, la tiza y la cinta métrica."

Actividad 5: Reinvertir la noción de circunferencia y de círculo en la resolución de problemas en los que intervienen otras figuras.

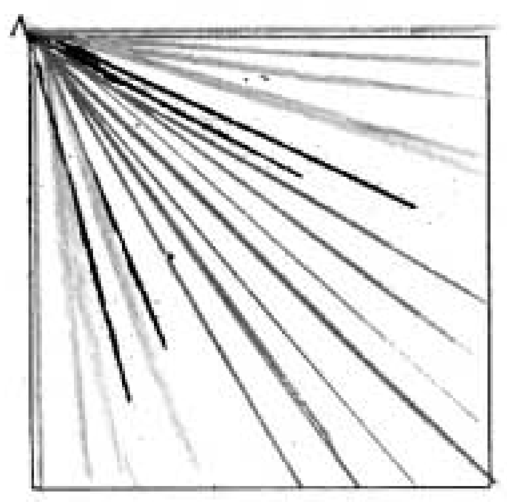
En este distintivo los niños no suelen reconocer como útil la información dada de que el lado del cuadrado medía 6 cm. La mayoría de los niños usa la regla, miden 6 cm sobre uno de los lados. Muchos chicos luego señalan el arco usando la regla y otros con el compás. El uso del compás se difunde rápidamente entre los niños.

El grupo de Matías traza el arco y lo pinta de amarillo. Explican a la maestra:

Matías:- Primero medimos 6 cm con el compás, y todos los puntos que están acá (refiriéndose al arco) están a 6 cm.
Ma: - Pero Uds habían pintado estos lados de amarillo y estos de rojo (refiriéndose a los lados del cuadrado).
Al: - Pero vimos a todos los chicos que estaban usando el compás.
Otro Al: -Yo le dije: "mirá, están todos usando el compás".
OtroAl: -Sí, pero también vimos que si seguimos la circunferencia alrededor del punto todos están a 6 cm, todos los de adentro medían menos y los de afuera medían más.

Muchos niños, como los puntos que están a más de 6 cm tienen que estar pintados de rojo, se confunden con la longitud del segmento que trazan para encontrar dichos puntos. Entonces, en lugar de pintar el extremo del segmento de rojo, pintan todo el segmento. Por ejemplo, Claudia dice:

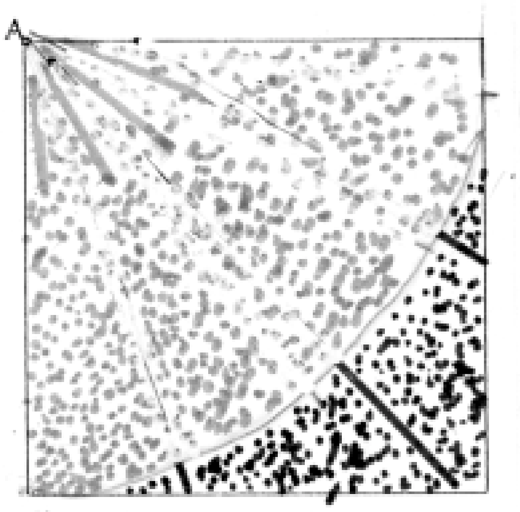
Claudia: -Pintamos los lados del cuadrado de amarillo porque miden 6 cm.



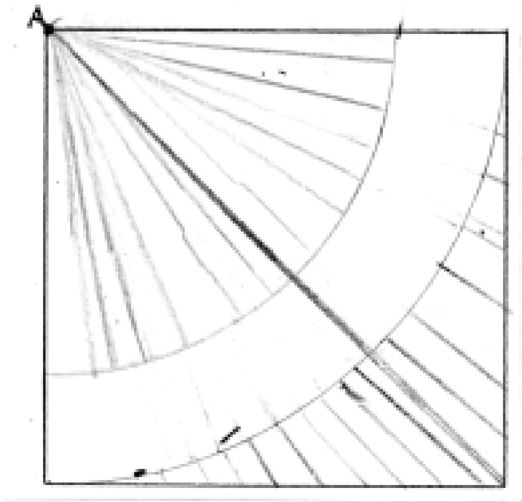
Esto no ocurre solamente con los lados del cuadrado sino que muchos niños trazan segmentos que pintan según su longitud, sin distinguir que en cada segmento hay puntos que miden menos de 6 cm, 6 cm o más de 6 cm. La medición del segmento que era el procedimiento para buscar un punto, pasa a ser considerado como solución al problema y se pinta entero de un solo color.

A pesar de que en la actividad anterior los niños habían trabajado con el concepto de círculo y la superficie que había que pintar para señalar todos los puntos que están a igual o menor distancia de una medida dada, en este problema vuelven a aparecer las producciones que reflejan la complejidad del salto de línea a superficie.

La mayoría de los niños han utilizado el compás para marcar el arco, es decir reconocen que la circunferencia determina los puntos de 6 cm de distancia de A. Pero luego marcan puntos a partir de radios para encontrar los de menos de 6 cm de distancia de A. No reconocen directamente que todos los puntos que están a menor distancia de dicho arco están a menos de 6 cm. Necesitan verificar punto por punto.

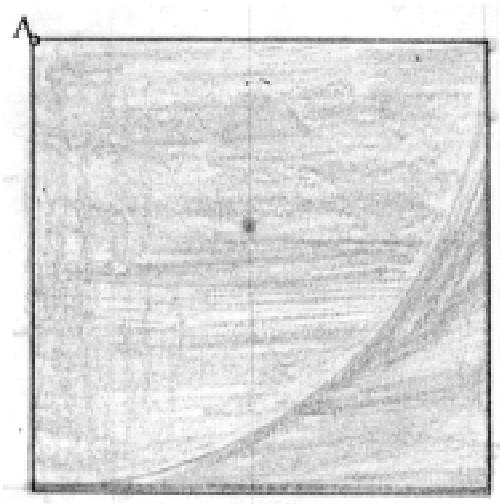


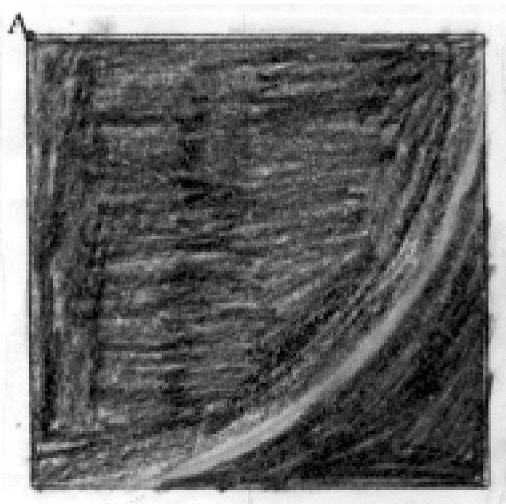
También prevalece, como es esperable, la dificultad de concebir un continuo de puntos que esté a menor distancia de 6 cm. Muchos niños marcan un arco de 5 cm porque como planteamos anteriormente 5 es menos que 6, en el terreno de los números naturales 5 es el número anterior a 6. Y la región de corona circular entre 5 cm y 6 cm de radio no se pinta de ningún color.



En esta actividad nuevamente resaltamos la importancia del trabajo colectivo en donde se discuten las diferentes respuestas al problema. Los niños tendrán oportunidad de analizar “si se puede estar seguro de que estos puntos miden menos o más que 6” sin necesidad de mediciones. La mayoría de los chicos ha realizado marcado de puntos y se espera que en esta fase colectiva recién quede una solución más completa al problema determinando las tres zonas: la interior al arco (todos los puntos a menor distancia que 6 cm), el arco (los puntos que están a 6 cm), y la exterior al arco (los puntos que están a más de 6 cm).

Se pueden mostrar las producciones como éstas en donde algunos alumnos reconocieron las tres zonas. Los chicos podrán completar sus trabajos pintando las zonas sobre los puntos ya encontrados.

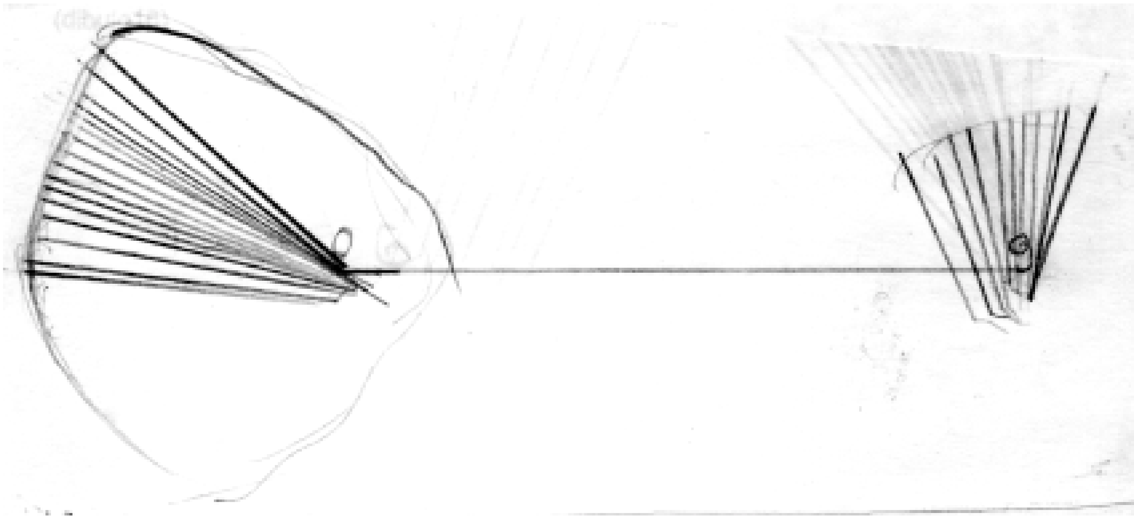




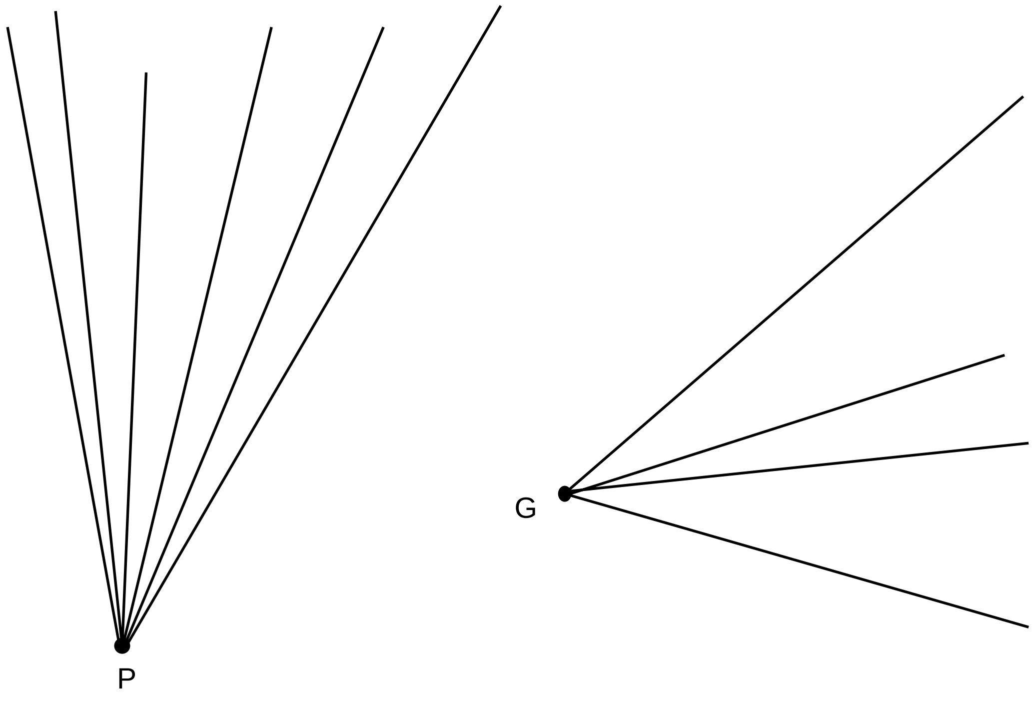
CUARTA PARTE: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

Actividad 1: Concebir un conjunto de puntos que debe cumplir simultáneamente dos condiciones, relativas a la noción de distancia.

La maestra explica la consigna y los chicos se disponen a buscar los puntos en dónde puede estar el tesoro. Muchos niños trazan a partir del punto G y a partir del punto P varios segmentos de 10 cm.



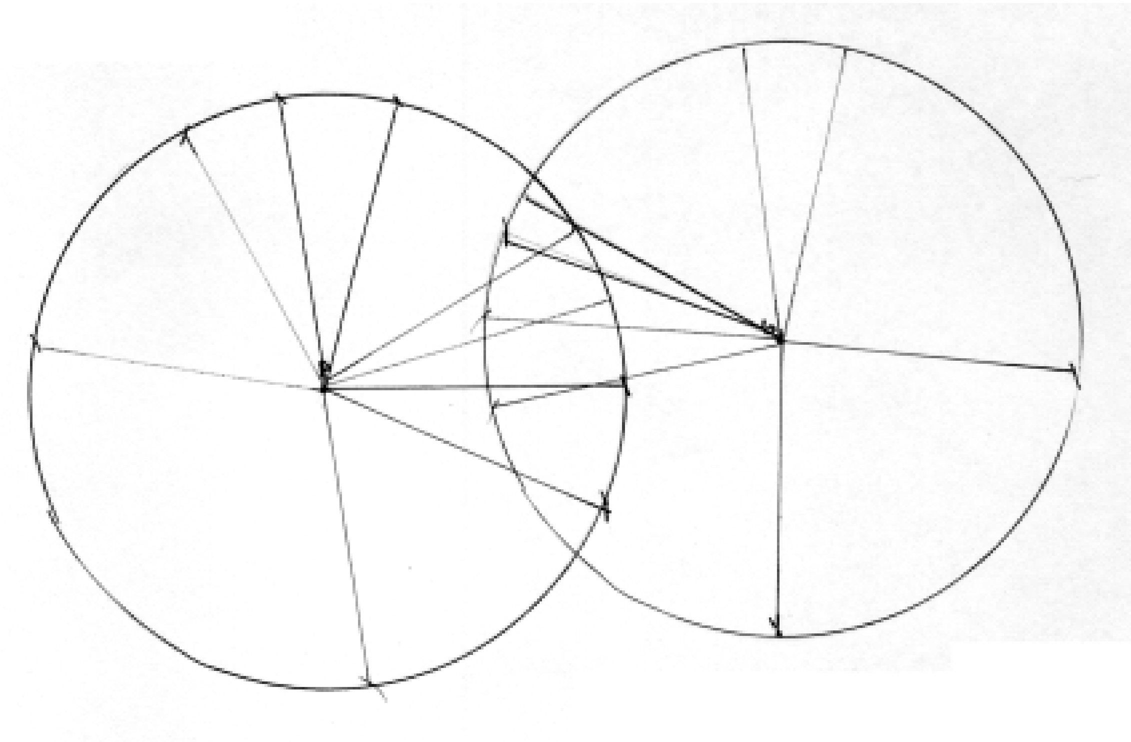
Algunos niños empiezan a usar la regla como compás y a trazar segmentos bien próximos de manera que les queda determinado un arco de circunferencia. Algunos niños abandonan la regla y trazan una porción del arco con el compás a partir de ambos puntos. Parecen satisfechos con su producción sin embargo los arcos no se cortan. Les cuesta comprender que debe estar a 10 cm de P y a 10 cm de G simultáneamente.



Para algunos niños, los segmentos sólo pueden trazarse para “arriba” o para “abajo”, con lo cual no logran encontrar puntos de intersección.

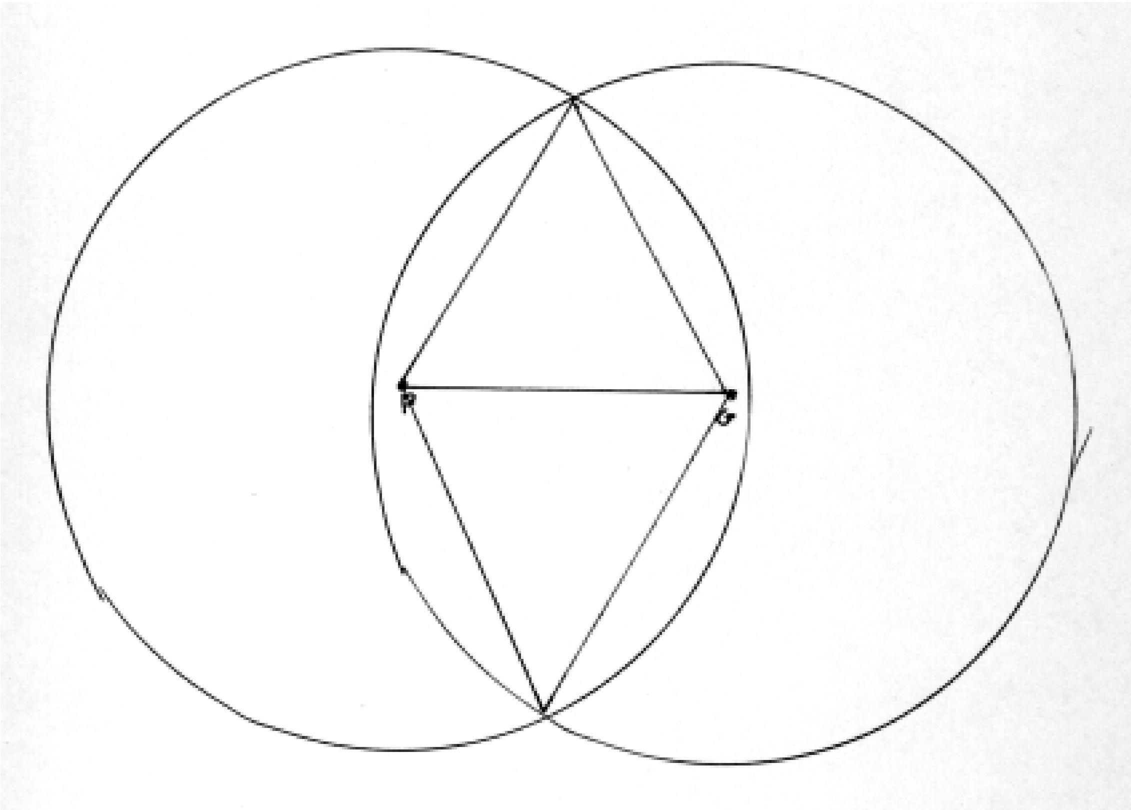
Otros niños marcan segmentos hacia todas las direcciones y realizan dibujos como éstos. Para muchos alumnos no es evidente cuál es la solución al problema. Han logrado trazar los segmentos y que se corten en uno o dos puntos, pero no los reconocen como solución al problema.

Otros niños resuelven el problema utilizando solamente la regla, pero dibujan segmentos intentando que se crucen, es decir los trazan hacia el centro de ambos. El problema es que algunos alumnos encontraron un punto en donde efectivamente puede estar el tesoro, pero no se han dado cuenta de que ése no es el único punto posible.



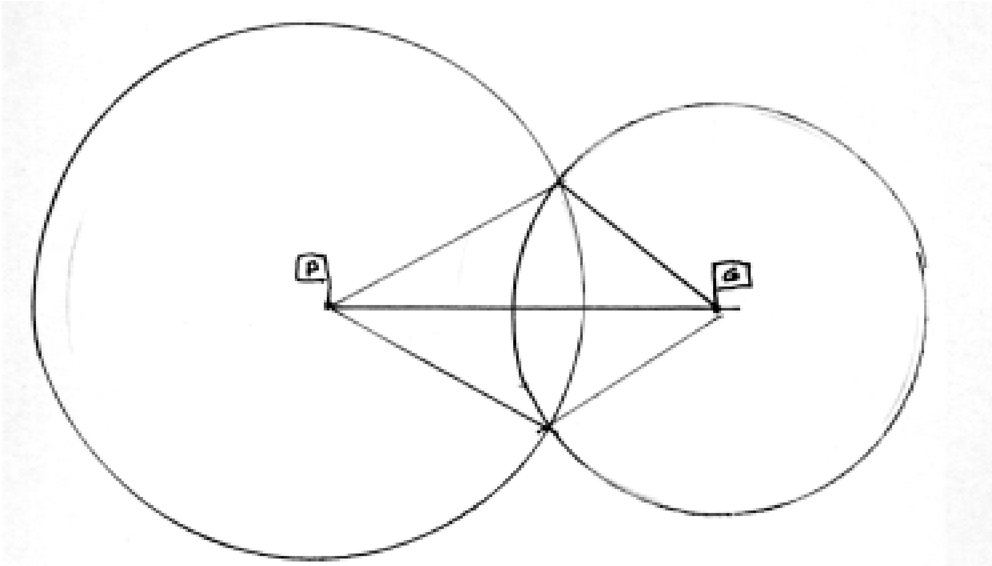
Algunos niños utilizan directamente el compás trazando ambas circunferencias. A pesar del directo reconocimiento de que el compás permite encontrar todos los puntos que estén a 10 cm de cada uno de los dos puntos dados, tampoco reconocen en cuáles de aquellos puntos puede estar el tesoro. Consideran resuelto el problema con haber trazado ambas circunferencias.

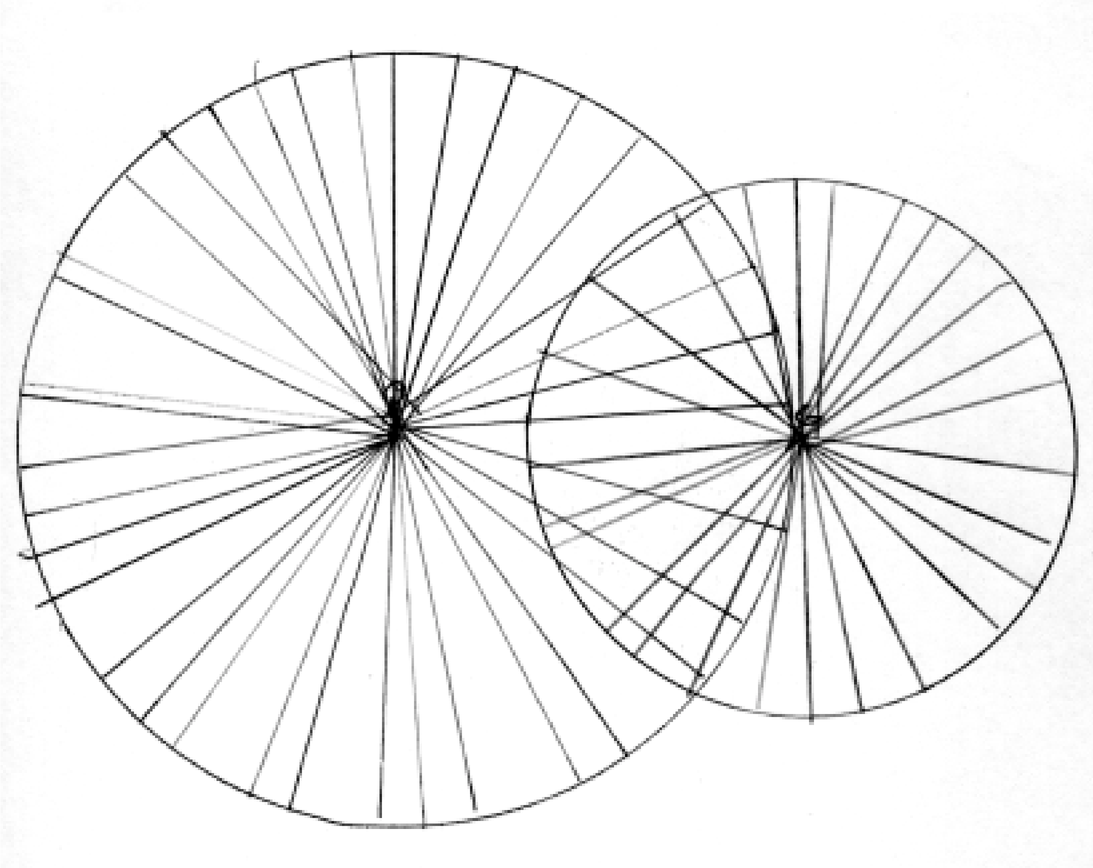
La puesta en común es el momento en donde se muestran las diferentes respuestas al problema: algunos niños no encontraron puntos comunes, otros encontraron un solo punto, otros trazaron la circunferencia y no pueden señalar los dos puntos de intersección y algunos pocos niños reconocen las dos soluciones del problema. Será importante resaltar en la puesta en común cuáles son los únicos dos puntos en donde puede estar el tesoro y cuáles son los procedimientos para lograrlo.



Actividad 2: Reinvertir la búsqueda de puntos que cumplen con dos condiciones de distancia de dos puntos dados.

En esta segunda actividad muchos niños suelen utilizar directamente el compás. Otros continúan utilizando la regla buscando manualmente puntos de intersección de segmentos y otros niños hacen las circunferencias pero trazan decenas de radios posibles. Veamos las producciones de los alumnos.

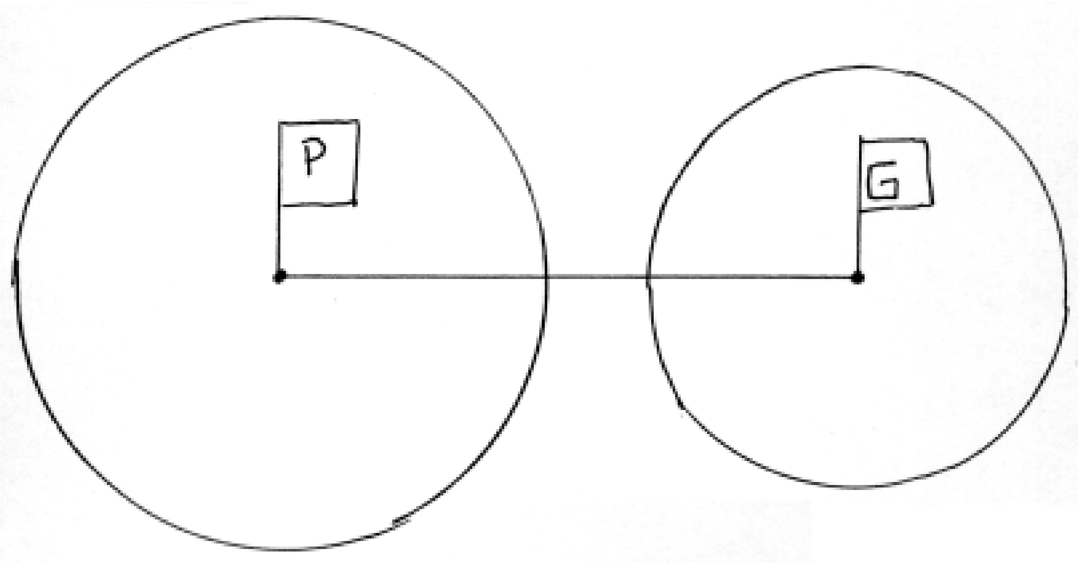




En general en esta actividad los niños logran reconocer cuáles son los dos puntos en los cuales puede estar el tesoro pues se trata de una actividad de reinversión de la anterior.

Actividad 3: Reinvertir lo aprendido en un problema sin solución.

En general los chicos en este tercer problema utilizan directamente el compás para determinar las dos circunferencias de 5 cm y de 3 cm respectivamente.



Se sorprenden de que las circunferencias de 5 y 3 cm de radio respectivamente no se junten. Una nena para referirse a que no hay puntos de intersección entre ambas circunferencias dice:

Al:- No se puede. ¡Se separan!

Luego del momento de trabajo colectivo en donde se analizan las producciones de los alumnos los chicos dicen que no pudieron encontrar el tesoro “porque las circunferencias están muy separadas”.

Como comentamos en la ficha didáctica los chicos deben tener la oportunidad de interpretar por qué en este caso “no se juntan las circunferencias”. Posiblemente aparezcan algunas ideas erróneas como la que dice este niño:

Al: - No se juntan porque una es más chica que la otra.

En este caso habrá que someter a discusión si ésta es la razón y contraargumentar con que en el caso anterior también las medidas eran diferentes y sin embargo había puntos de intersección entre ambas circunferencias.

Igual que en otras actividades en estos tres problemas los alumnos sólo tienen oportunidad de tener una devolución acerca de sus producciones en el trabajo colectivo de la puesta en común. Es importante que los niños puedan comprender por qué el compás es un instrumento útil para resolver este problema aunque pueda resolverse con la regla de manera menos económica. El énfasis no se pondrá tanto en el uso del compás sino en la determinación de la cantidad de puntos que cumplen con ambas condiciones de distancia.

Los niños pueden registrar las conclusiones en sus cuadernos señalando que en los dos primeros casos había dos puntos posibles en donde podía estar el tesoro, pero que en el último caso ningún punto cumplía con las dos condiciones simultáneamente.

GEOMETRÍA 5TO GRADO
LAS DIAGONALES DEL RECTÁNGULO:
UNA OPORTUNIDAD PARA EXPLORAR, CONSTRUIR Y DISCUTIR

Secuencia Didáctica elaborada por el equipo de Matemática de la Dirección de Currícula, G.C.B.A., integrado por Patricia Sadovsky, Cecilia Parra, Horacio Itzcovich y Claudia Broitman.

INDICE de la FICHA DIDÁCTICA

Presentación

La secuencia que elaboramos para 5to grado está organizada en torno a ciertas relaciones entre rectángulos y circunferencias que favorecen el análisis de algunos de sus elementos y propiedades. Como nos plantearon los maestros participantes del proyecto, “Rectángulo” y “Circunferencia y círculo” son temas que habitualmente se trabajan en forma independiente. Sabemos que es así. Por ello en esta introducción queremos presentar algunas de las ideas que comandaron la realización de la secuencia y dar razones de nuestras elecciones.

Al diseñar la secuencia buscamos que los alumnos incorporen nuevos elementos de análisis de las figuras: en este caso en particular la diagonal del rectángulo como su distancia máxima. A lo largo del trabajo propuesto a los alumnos la diagonal aparece de distintos modos: como elemento implícito –explicitable– en la actividad de construcción de circunferencias a partir de las figuras inscriptas, como punto de partida y como recurso –utilizable entre otros– en la actividad de construcción de rectángulos y como dato relevante al tener que analizar la relación de inscripción entre rectángulos y circunferencias (comprometiendo su relación con el diámetro de la circunferencia).

Sabemos que puede parecer “mucho ruido para pocas nueces” pero intentaremos mostrar que es el trabajo en profundidad sobre algunos aspectos bien elegidos lo que va a permitir desencadenar en el aula un trabajo en geometría como el que se esboza en el marco general de este documento. Se podrían haber elegido otros conceptos como eje de la secuencia –y de hecho es necesario que se produzcan propuestas para otros conceptos– pero entendemos que es inevitable el recorrido “menudo” en el que se vuelve sobre los conceptos de un modo y otro para que se conviertan en verdaderas adquisiciones de los alumnos.

En el armado de la secuencia buscamos también que los alumnos enfrentaran, a raíz del mismo objeto, actividades de distinta naturaleza. Básicamente hay en la secuencia tres momentos distintos:
-un primer momento, breve, de exploración de la relación entre rectángulos y circunferencias en el que el material está presente y disponible y los alumnos “ven” que el rectángulo “calza justo” o “flota” o “sobresale” (actividad 1);
-un segundo momento centrado en la construcción, en el que los alumnos usan sus conocimientos anteriores, ideas implícitas etc., pero que será a la vez una oportunidad para establecer nuevas relaciones y explicitar conocimientos que permiten controlar las construcciones poniendo en cuestiòn el control “perceptivo” (actividades 2 y 3);
-un tercer momento que retoma la relación explorada al inicio de la secuencia pero que exige a los alumnos obtener y tratar información. A partir de los datos los alumnos tienen que establecer relaciones, producir afirmaciones y reflexionar sobre el grado de certeza que tienen sobre las mismas (actividad 4).

Argumentar, dar razones, convencer o convencerse de que una afirmación que se ha hecho es falsa es sin duda hacer matemática, y, en este caso, es empezar a tomar contacto con el modo de pensar propio de la geometría.

En el apartado “Instantáneas del aula” van a encontrar testimonios del recorrido de los alumnos por estos distintos momentos, que no fueron iguales en todas las aulas ni en todos los chicos. Las observaciones nos permitieron detectar aspectos de la secuencia que había que modificar, y aun esta versión, como toda propuesta didáctica, está sujeta a revisiones. Pero les permitió, a maestros y a alumnos, llevar adelante un trabajo en el que el conocimiento estaba “sujeto a revisión”, es decir, había distintas miradas, distintas maneras, discusiones, reformulaciones y un producto común, quizás pequeño, quizás no tan pequeño.

Conocimientos previos

Es necesario que los alumnos hayan trabajado los conceptos de círculo y circunferencia[38], conozcan algunas formas de caracterizar el rectángulo, hayan tenido oportunidad de utilizar el compás y estén familiarizados con la utilización de la escuadra.

Objetivos:

Que los niños puedan:

- explorar las condiciones para la inscripción de un rectángulo en una circunferencia
- establecer que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en su punto medio
- establecer que un rectángulo está inscripto en una circunferencia cuyo diámetro es congruente con la diagonal del rectángulo
- construir rectángulos a partir de una diagonal
- realizar anticipaciones a partir de ciertos datos
- iniciarse en una práctica de argumentación.

<u>Actividad 1</u>

Exploración de la relación de inscripción entre rectángulos y circunferencias

En esta actividad introductoria se busca que los alumnos exploren las relaciones posibles entre rectángulos y círculos cuando se los superpone. Deberá quedar establecido un vocabulario común: “está inscripto” o “calza justito”, “no está inscripto” o “queda adentro” o “sobresale”.

<u>Materiales</u>

Para cada alumno cuatro rectángulos y un círculo (los materiales propuestos en cada caso se incluyen en el anexo 1).

<u>Organización de la clase</u>

Los alumnos exploran individualmente pero están organizados en pequeños grupos. Estos grupos permanecerán para actividades siguientes.

<u>Consigna</u>
Presentación del tema

“Cada uno de ustedes va a recibir un conjunto de rectángulos y un círculo, todos los mismos. Van a fijarse qué pasa cuando superponen un rectángulo al círculo: entra, sobra... En unos minutos vamos a comentar las posibilidades y nos vamos a poner de acuerdo en maneras de nombrarlas.”

---

[38] Si este tema no ha sido trabajado se puede llevar adelante la parte correspondiente de la propuesta para 4to grado.

Puesta en común

Se realiza según la consigna: queda establecido un vocabulario común.
El maestro precisa los conceptos de círculo y circunferencia vinculándolos a la exploración realizada, por ejemplo señalando que los vértices del rectángulo pertenecen a la circunferencia correspondiente al círculo entregado.

Actividad 2

Construcción de circunferencias a partir de las figuras inscriptas.

Materiales (ver anexo 2**)**

- un cuadrado recortado
- el mismo cuadrado dibujado
- un rectángulo ("clásico") recortado
- el mismo rectángulo dibujado
- un rectángulo ("alargado") recortado
- el mismo rectángulo dibujado
- regla, compás, lápiz.

Fase 1

Consigna

"Ustedes vieron que un rectángulo puede o no estar inscripto en una circunferencia.
Lo que voy a proponerles ahora es una construcción.
Van a recibir una figura (recortada y fotocopiada) y el problema que tienen que resolver es cómo trazar la circunferencia en la que está inscripta. A la figura recortada pueden plegarla, marcarla, pero la circunferencia les tiene que quedar trazada donde tienen la figura dibujada. Cuando lo hayan hecho para la primera vamos a comentar cómo lo hicieron antes de pasar a otra.
Pueden usar lápiz, regla y compás y pueden hacer en la figura o en la hoja lo que les haga falta."

Desarrollo de la actividad (con el cuadrado)

El maestro entrega primero el cuadrado.
En el caso del cuadrado se facilita la búsqueda del centro de la circunferencia debido a que los alumnos tienen una cierta idea implícita de que el cuadrado tiene un centro de simetría y que ese punto es el centro de la circunferencia.
Mientras los alumnos trabajan, el maestro observa lo que hacen.

Procedimientos de los alumnos

Los alumnos buscan determinar el centro de la circunferencia ya sea plegando o trazando las bases medias o las diagonales.
Pinchan el compás en la intersección de los segmentos.

Quienes hayan marcado las bases medias probablemente abran el compás hasta tocar un vértice, lo cual hace aparecer en acto –de modo implícito- la mitad de la diagonal (el radio). Con esa abertura van a trazar la circunferencia.
Hay alumnos que interpretan la construcción de la circunferencia como una actividad que puede resolverse por ensayo y error: a partir de un centro a "ojo" mueven el compás hasta una abertura que les parece adecuada, sin tomar conciencia de la necesidad de determinar este centro.

Puesta en común

El objetivo de esta primera puesta en común es, a partir de los comentarios de los alumnos, establecer que para trazar una circunferencia es necesario precisar dónde "pinchar el compás" y qué abertura darle. Se busca eliminar la idea del tanteo. Se explicita que después de haber trabajado con las dos figuras siguientes van a tener que dictarle al maestro el procedimiento para que éste lo realice en el pizarrón. Saber que esto va a suceder puede favorecer en los alumnos la idea de que hay que buscar un procedimiento preciso, comunicable para trazar la circunferencia.

Desarrollo de la actividad (con los rectángulos)

El maestro entrega primero el rectángulo "clásico" y después el "alargado".
Los alumnos tienen material para trabajar individualmente (se busca que todos se involucren y que haya diversas búsquedas simultáneas). Es conveniente recorrer los equipos y recordarles que más tarde tendrán que ponerse de acuerdo sobre el procedimiento que van a dictarle al maestro.
En particular es importante observar si los grupos que usaron las bases medias para determinar el punto medio del cuadrado modifican el procedimiento y usan las diagonales para los rectángulos.

Fase 2

Consigna

"Cada equipo buscó una manera de trazar las circunferencias, en la mayoría de los casos son parecidas. Ahora yo voy a trazar un rectángulo en el pizarrón y un equipo me va a ir dando instrucciones para trazar la circunferencia en la que está inscripto. Los demás equipos van a estar atentos para ver si el procedimiento de ese equipo es como el suyo. Si hay diferencias cuando ese equipo termine las van a comentar."

Desarrollo de la actividad

Si el equipo que dicta usó plegados, el maestro puede realizarlos sobre una hoja grande.
Cuando los alumnos van a dar instrucciones de dibujo (todos tuvieron que dibujar), el maestro plantea la dificultad de hacer en el pizarrón un rectángulo tan pequeño como aquel con el que los alumnos trabajaron y les pregunta si hay algún problema en hacer uno más grande.[39]

---

[39] Aceptar que se puede trabajar sobre un rectángulo con otras medidas es aceptar que se va a hablar de un procedimiento útil para esa figura en general, no en particular. Así, por ejemplo, en el caso de que hayan usado las bases medias, los alumnos tendrán que indicar al maestro que busque el punto medio de los lados y cómo hacerlo en vez de dictar una medida particular.

El maestro realiza en el pizarrón lo que el equipo seleccionado le dicta tratando de no completar o subsanar las imprecisiones. Al contrario es útil señalarlas y pedir mayor precisión, en particular respecto de dónde pinchar el compás y en cuanto a la abertura del compás.
Si los alumnos no disponen o no usan un vocabulario que permita precisar y sintetizar el procedimiento, el maestro va a presentar las denominaciones correspondientes a los elementos puestos en juego en el procedimiento, en particular “vértice”, “diagonales”, “centro de la circunferencia”.
Es conveniente comentar que las bases medias permiten encontrar el centro pero, dado que las diagonales también lo permiten sin medir, es recomendable utilizarlas.
Puede suceder que todos los equipos hayan usado las bases medias para determinar el centro de la circunferencia y que las diagonales no hayan aparecido explícitamente. En ese caso el maestro puede plantear un nuevo problema:

“Todos ustedes han medido los lados para encontrar los puntos medios y trazar los segmentos (o bases medias si la denominación existe en la clase) que les permiten encontrar el centro de la circunferencia. <u>Les propongo que piensen si hay alguna manera de encontrar ese punto sin medir.</u> Pueden usar las figuras que tienen recortadas, pero no pueden usar la regla.”

Se busca alcanzar una formulación del procedimiento.
Una posible síntesis del mismo sería: “Trazamos las diagonales del rectángulo para encontrar el centro de la circunferencia y abrimos el compás desde el centro hasta uno de los vértices para trazarla.”
El procedimiento formulado puede ser escrito en un afiche para poner en el aula y/o en el cuaderno por cada alumno.

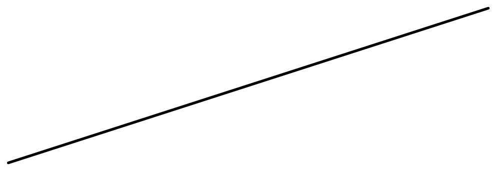
<u>Actividad 3</u>
<u>Construcción de rectángulos a partir de sus diagonales</u>

Esta actividad consta de tres fases. Entre la primera y la segunda la complejidad creciente está planteada a raíz del cambio de posición del segmento que ha de ser tomado como diagonal del rectángulo. En ambas fases la mayoría de los alumnos van a usar la escuadra como el recurso que les permite trazar ángulos rectos y así construir los rectángulos. La tercera fase, al no permitir el uso de la escuadra, apunta a que los alumnos tengan que poner en juego otros recursos, otros conocimientos (las propiedades de las diagonales del rectángulo, la posibilidad de construirlo a partir de la circunferencia de la que la diagonal es el diámetro).

<u>Fase1</u>
Consigna:

“Hoy vamos a volver a hacer una construcción, el trabajo va a ser individual pero pueden comentar con los compañeros que tienen cerca. Cada uno va a recibir una hoja como ésta en la que está marcado un segmento. Este segmento es una de las diagonales de un rectángulo. El trabajo para ustedes va a ser, a partir de esta diagonal, construir un rectángulo en el que este segmento sea diagonal. Pueden usar escuadra, lápiz y compás.”

Este primer segmento está inclinado respecto de los lados de la hoja, lo cual favorece que los alumnos tengan una más rápida representación del rectángulo a construir.



Procedimientos de los alumnos

Algunos alumnos desplazan el ángulo recto de la escuadra sobre el segmento y cuando los lados del ángulo están "aproximadamente" paralelos a los lados de la hoja van a marcar los lados del rectángulo. A partir de esto pueden repetir el procedimiento para los otros lados o trazar la otra diagonal y completar los lados. Otro procedimiento posible es encontrar el punto medio y construir la otra diagonal conservando ese punto como punto medio de la nueva diagonal.
Es posible, pero no muy probable, que algunos alumnos recuperen el trabajo reciente y busquen el punto medio del segmento para encontrar el centro de la circunferencia, lo marquen y trazando cualquier otro diámetro obtengan la otra diagonal, al unir los extremos de los diámetros trazan los lados de un rectángulo
Pese a que la posición del segmento diagonal facilita la actividad es posible que muchos alumnos no controlen si lo que han construido es o no un rectángulo. Por ejemplo, los alumnos que desplazan el ángulo recto de la escuadra sobre el segmento diagonal logran producir dos ángulos rectos pero no les resultan rectos los ángulos correspondientes a la diagonal de la que partieron (visto de otra manera: no controlan el paralelismo de los lados).[40]

Breve puesta en común

Para favorecer el control de los alumnos sobre sus construcciones es conveniente plantearles cómo se puede saber o verificar si lo que construyeron es un rectángulo. Sabemos que si una figura es un paralelogramo y tiene un ángulo recto, es un rectángulo. Pero esta definición no es propia de las formulaciones de los alumnos, quienes generalmente mencionan más condiciones de las necesarias y suficientes. A esta altura de la escolaridad quedaría justificado que es un rectángulo si los alumnos lo caracterizan de algunas de las siguientes formas[41]:
"Tiene cuatro ángulos rectos"
"Los lados opuestos son paralelos y los ángulos son rectos"
"Tiene dos pares de lados iguales y ángulos rectos".
Esta explicitación cobra importancia sobre todo a raíz del trabajo en la fase siguiente en la que, por la posición de la diagonal, la construcción es mucho más difícil para los alumnos y, en muchos casos, será necesario que la revisen y rehagan.

[40] Pueden verse ejemplos en "Instantáneas del aula".

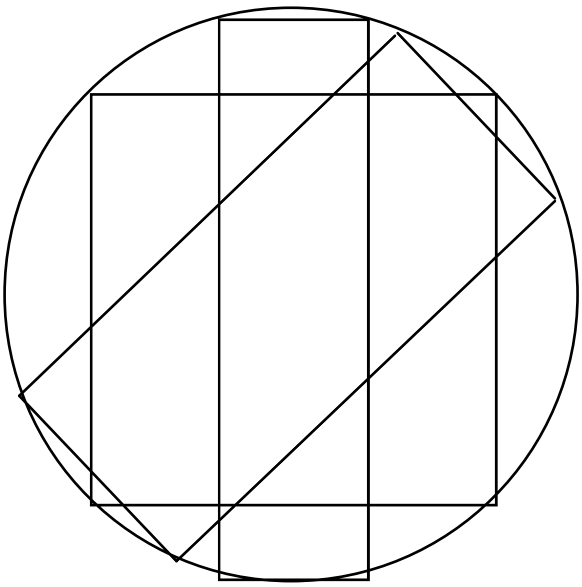
Fase 2
Consigna

"Ahora van a volver a construir un rectángulo pero a partir de un nuevo segmento que voy a entregarles, que, como antes, es una de las diagonales del rectángulo."

Esta vez el segmento-diagonal está trazado en forma horizontal, lo cual va a dar lugar a la construcción de un rectángulo en una posición en la hoja que no es la habitual.
Esta actividad constituye un gran desafío para los alumnos ya que tienen que "rechazar" la imagen prototípica del rectángulo en su posición habitual y controlar su producción por medios no perceptivos. Es, al mismo tiempo, una oportunidad para que los alumnos aprendan que la posición no caracteriza al rectángulo.
Muchos alumnos usando la escuadra marcan dos ángulos rectos (uno "arriba" y otro "abajo" de la diagonal), pero los lados no son paralelos ni iguales. En algunos casos les cuesta tanto imaginar un rectángulo en otra posición que toman el segmento diagonal dado como lado del rectángulo. Esto debe ser indicado (si no están trabajando con otro problema: construir un rectángulo a partir de un lado) para que realmente enfrenten el problema planteado. [42]
Puede dedicarse un momento a comentar los procedimientos que les han permitido la construcción efectiva del rectángulo antes de pasar a la fase siguiente.

Consigna

"Han construido un rectángulo a partir de una diagonal. ¿Les parece posible construir otro rectángulo, distinto del que tienen, a partir de esa misma diagonal?
....Sí...no... Prueben, vean si pueden construir otros rectángulos distintos a partir de la misma diagonal. Trabajen sobre esa construcción, la que tienen."



[42] Ver ejemplos de producciones y revisiones de los alumnos en "Instantáneas del aula".

Conclusión

Se buscará formular con los alumnos una conclusión de la experiencia. Los alumnos habrán visto que se puede construir muchos rectángulos a partir de una misma diagonal. El maestro podrá ahora o más tarde informarles que son infinitos los rectángulos que tienen una misma diagonal.

Fase 3
Consigna

"Ustedes han usado la escuadra para construir el rectángulo a partir de la diagonal. Ahora voy a proponerles un nuevo desafío: van a recibir un segmento-diagonal , como antes, y tienen que construir un rectángulo pero, esta vez, no pueden usar la escuadra. Sólo pueden usar regla, lápiz y compás.[43]"

Procedimiento de los alumnos

Uno de los procedimientos que permite resolver el problema es encontrar el punto medio del segmento y por ese punto trazar otro segmento de la misma longitud del dado (la otra diagonal).
Otro procedimiento posible es encontrar el punto medio del segmento, hacer centro en ese punto, tomar como radio la distancia hasta un extremo del segmento, trazar la circunferencia así determinada y luego trazar otro diámetro cualquiera. Uniendo los extremos de los segmentos se obtiene el rectángulo.

Puesta en común

Se describen los procedimientos y se establece una relación con los elementos y propiedades de circunferencias y rectángulos que se han estudiado:
-la diagonal de un rectángulo es el diámetro de la circunferencia que lo inscribe, la mitad de la diagonal es el radio de la circunferencia,
-las diagonales del rectángulo son iguales y se cortan en el punto medio,
-a partir de una diagonal se pueden construir infinitos rectángulos inscriptos en la misma circunferencia.
También pueden registrarse otras conclusiones de los alumnos relativas al trabajo realizado, por ejemplo "Una figura para ser rectángulo no necesita estar derecha".

Actividad 4
Análisis de la relación "..está inscripto en..." a partir de informaciones sobre rectángulos y circunferencias

Aunque el problema que va a presentarse retoma la relación explorada al inicio de la secuencia, es realmente nuevo: los rectángulos no están presentes sino que tienen que ser pensados. Los alumnos tienen que decidir cuáles son las informaciones pertinentes y cuando las obtienen tienen que establecer relaciones.
Para esta altura de la secuencia se ha trabajado mucho con la diagonal, que es el elemento que permite, conocido el diámetro, saber con certeza qué relación se establece entre cada rectángulo y la circunferencia. Cuando los alumnos reconozcan que la

---
[43] Se debe controlar que la regla no sea usada como escuadra.

diagonal es la información pertinente habrán construido un nuevo sentido de la misma: es la distancia máxima en todo rectángulo y comparada con el diámetro permite decidir.
Sin embargo, esta actividad, con sus dos fases, ha sido pensada para favorecer distintas aproximaciones de los alumnos en dos sentidos:
- por un lado, se presentan casos en los que otros datos permiten decidir (para poner en juego un conjunto de relaciones y no sólo lo relativo a la diagonal),
- por otro lado, en la primera fase, es posible que los alumnos prueben empíricamente si los lados "entran" en el círculo ya que disponen del mismo, en cambio en la segunda fase los alumnos están forzados a analizar los datos y a anticipar la relación posible sin poder probar empíricamente. Más precisamente se compromete a los alumnos a tener que distinguir los casos, según los datos, en los que es posible hacer afirmaciones sin probar de aquellos en los que habría que probar. Al plantear el problema de la certeza ("¿Se puede saber seguro sin probar?") se busca iniciar un cierto juego deductivo y de pruebas intelectuales.

Materiales:

Una circunferencia y una planilla por equipo.
Rectángulos recortados para la verificación.
(Ver anexo 3).

Fase1
Consigna:

"¿Se acuerdan de que en la primera clase estuvieron viendo relaciones posibles entre rectángulos y circunferencias? ¿Se acuerdan que vimos que el rectángulo podía estar inscripto en la circunferencia o no estarlo, ya sea porque queda adentro o sobresale? Hoy van a volver a trabajar sobre eso, pero no probando con todo a la vista, sino pensando a partir de ciertos datos.

Cada equipo va recibir una hoja en la que está trazada una circunferencia, de la que se indica la medida del diámetro. Todos los equipos tienen la misma.
Yo tengo acá en el escritorio cuatro rectángulos y para cada uno ustedes van a tener que pensar si está inscripto, o queda adentro o sobresale de la circunferencia.
Pero yo no voy a darles los rectángulos sino que voy a darles informaciones, las que ustedes pidan, las que piensan que les sirven para saber qué pasa entre ese rectángulo y la circunferencia que tienen.
Para pedirme la información van a usar esta planilla: en el casillero del rectángulo A anotan lo que quieren saber. Yo les contesto y con esa información piensan y después escriben en el casillero que corresponde a *'Pensamos que'*: 'está inscripto' o 'queda adentro' o 'sobresale'. Después que hicieron todo eso para el rectángulo A, se los voy a dar para que verifiquen si lo que pensaron está bien o no. Entonces anotan lo que observan al superponerlo. Para los otros tres rectángulos van a pedir información y pensar lo que pasa, pero no se los voy a dar para probar. Eso lo vamos a ver después entre todos."
Puede ser conveniente plantear a los alumnos que no hay límites en la cantidad de datos que piden y que pueden repetir el mismo pedido que hicieron en un rectángulo para otro.

	Rectángulo A	Rectángulo B	Rectángulo C	Rectángulo D
Queremos saber				
Pensamos que				
Verificamos				

En cada equipo se ponen de acuerdo sobre la información a pedir, escriben lo que quieren saber: por ejemplo "la medida del lado largo y la del lado corto". El maestro les responde escribiendo los datos en la planilla. Luego los alumnos escriben lo que creen que pasa, por ejemplo "sobresale". Recién entonces el maestro les entrega el rectángulo A para la verificación.
Para los otros tres rectángulos se cumplen los dos primeros pasos ya que la verificación va a ser posterior a la puesta en común.

Procedimientos de los alumnos

Puede ser que los alumnos soliciten:

- la medida de un solo lado
- la medida de los dos lados
- la medida de la diagonal
- la medida de los dos lados y la medida de la diagonal

Son posibles distintas aproximaciones por parte de los alumnos. Las medidas de los lados, en algunos casos, permiten decidir.[44] Por ejemplo si uno de los lados es mayor que el diámetro entonces el rectángulo sobresale. Conocer la medida de la diagonal permite siempre decidir con seguridad. Sin embargo a veces los alumnos piden esta medida sólo en algunos casos, porque creen que los datos "se gastan" y necesariamente deben cambiar: para un rectángulo piden una o unas medidas, para otro, otras.
En esta fase los alumnos tratan de diversas maneras los datos que obtienen. En algunos equipos es posible que, por ejemplo, si han pedido la medida de los lados se pongan a probar con la regla si "entran" en la circunferencia y quizás los tracen. En este caso están más probando empíricamente que anticipando. Otros alumnos, en cambio, puede ser que analicen las relaciones entre la medida del diámetro y la de los lados o la diagonal que han solicitado. Están más claramente en el terreno de la anticipación.

Desarrollo de la clase

La verificación propuesta para el primer rectángulo ha sido pensada para devolver información a los alumnos y favorecer la evolución.
Por otra parte, completar los tres aspectos (pedido de información, anticipación y verificación) para el primer rectángulo puede facilitar que los alumnos comprendan el carácter distinto de cada uno de ellos.

[44] Estas aproximaciones son relativas a un contexto de trabajo en el que los alumnos no conocen la relación pitagórica. Dicha relación siempre permite determinar la diagonal dada la medida de los lados.

Puesta en común

Se comienza preguntando si lo que pensaron para el rectángulo A fue confirmado o no. Se comentan las situaciones presentadas: en qué casos la anticipación fue errónea, en qué casos y con cuáles informaciones pudieron decidir con mayor seguridad.
Para los demás rectángulos, considerando uno por vez se pregunta qué anticiparon y en qué se basaron. Se trata de provocar la formulación de argumentos del tipo “Como los dos lados son bastante cortos pensamos que queda adentro” “Un lado es muy largo así que seguro que sobresale” Este tipo de argumentos son los que van a permitir enfrentar el trabajo de la fase siguiente, aunque justamente algunos de ellos van a ser discutidos, rechazados o relativizados.
Después de este momento se entregan los otros rectángulos para la verificación.

Fase 2
Consigna

“Cada equipo debe llenar el siguiente cuadro, estableciendo para cada uno de los rectángulos que allí figuran
-si con los datos presentados se puede saber, sin probar, qué relación se establece entre el rectángulo y la circunferencia;
-en el caso de que piensen que sí se puede saber, determinar si está inscripto, sobresale o queda adentro”.
Se dan como datos la medida del diámetro de la circunferencia, en algunos casos las medidas de los lados y en otros la medida de la diagonal del rectángulo.

	Rect A		Rect B		Rect C		Rect D		Rect E		Rect F		Rect G		Rect H	
	Lado = 15 lado = 5		Diag = 12		Diag = 17		Lado = 9 lado = 12		Lado = 10 lado = 10		Diag = 15		Lado = 16 lado = 7		Lado = 13 lado = 8	
¿Se puede saber seguro sin probar?	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
Pensamos que																

Procedimientos de los alumnos

Para los alumnos es complejo entender lo que se les pregunta, entre otras cosas porque tienen que distinguir entre los “ensayos mentales” (representaciones, juego de relaciones) y la prueba empírica (construir el rectángulo para ver lo que pasa) y porque además se les pregunta sobre el nivel de certeza que su razonamiento les provee.
Lo habitual en la escuela es tener que dar las respuestas con seguridad, por ello a muchos alumnos les puede costar imaginar que “No, no se puede saber” sea una respuesta adecuada.
Aunque la consigna se explique bien es posible que muchos alumnos vayan captando el sentido de la actividad cuando termine, después de la puesta en común.

Puesta en común

La necesidad de presentar argumentos es más clara para los alumnos cuando hay diferencias entre las respuestas que dieron. En esta actividad es muy posible que las haya por lo cual es conveniente organizar un cuadro que sintetice las respuestas de los equipos.
Por ejemplo:

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
Equipo 1	Sí S	Sí Q	Sí S	No ¿?	Sí Q	Sí I	Sí S	No ¿?
Equipo 2				Sí S				
Equipo 3				Sí Q				
Equipo 4				Sí Q				
Equipo 5				No ¿?				

Referencias:
Sí: se puede saber ; Q: queda adentro ; S: sobresale ; I: inscripto
No: no se puede saber

Al analizar las respuestas dadas para cada rectángulo cada equipo debe defender la suya. Por ejemplo para el rectángulo D (Lado =9 y lado=12) el equipo 3 puede decir: "Los lados son más chicos que el diámetro así que seguro queda adentro, flota" y el equipo 1 podría argumentar: "Que entra bueno, pero en una de esas entra justito porque mirá calzás 9 donde entra 9 y de ahí subís 12 y por ahí tocás los vértices".
Si en esa discusión unos equipos convencieron a otros, o un equipo se ha dado cuenta que otra respuesta le parece más correcta el maestro puede permitir que la cambien (siempre y cuando den razones). Esta actividad no es competitiva, no se gana por número de aciertos. Es importante que los alumnos comprendan que es una actividad de colaboración intelectual para alcanzar certeza fundamentada.
Se debe tratar de que los alumnos permanezcan en el terreno del debate, de las pruebas intelectuales lo más posible y dejar la verificación, la prueba empírica – construir el rectángulo- como último recurso. Por ejemplo en relación con el rectángulo D, respecto del cual mostramos argumentos antes, es conveniente sostener el debate sobre si se puede saber seguro o no. Si el o los equipos que afirmaron que se podía saber aceptan la "duda razonable" (podría estar inscripto o quedar adentro) se ha cuestionado la "certeza" original y la verificación posterior –construirlo– contesta lo que de otro modo no se podía saber.

Después de realizar un análisis como el sugerido para cada rectángulo se propone a los alumnos que formulen sus conclusiones, por ejemplo: "Conociendo la medida de la diagonal se puede saber" "Conociendo los lados a veces se puede saber y a veces no" "Si un lado del rectángulo es mayor que el diámetro de la circunferencia se sabe que sobresale".

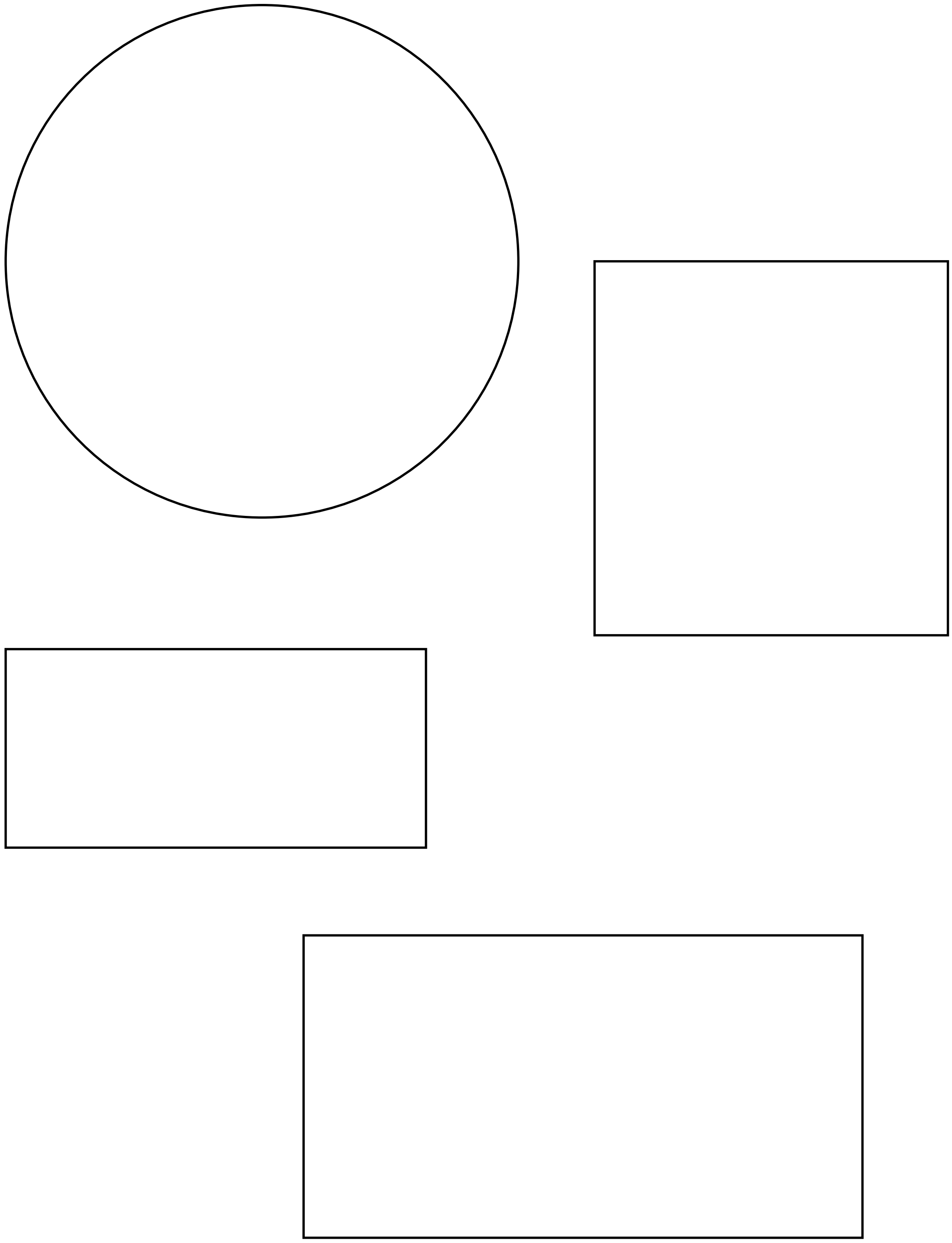
Cabe aclarar que estas son las conclusiones a las que pueden arribar los alumnos a partir de las actividades realizadas. En tal sentido son provisorias y serán sucesivamente rectificadas a medida que los conocimientos de los alumnos avancen.
Los alumnos también pueden formular reflexiones sobre el tipo de actividad realizada. Como dijo un alumno: "Aprendí que no se puede ser tan confiado de entrada".
Es decir, los alumnos son invitados a detenerse, a mirar el problema y sus respuestas en varios niveles.

Dicen Berthelot y Salin: "Resolver un problema de geometría es una actividad que concierne al carácter necesario y no contradictorio de ciertas propiedades de los objetos de la geometría. (...) La validez de sus declaraciones ya no es establecida empíricamente sino que se apoya en razonamientos que obedecen a las reglas del debate matemático."[45]
Hacer geometría en el sentido antedicho es una conquista que requerirá de varios años de trabajo.
Los alumnos del segundo ciclo pueden involucrarse en actividades que los aproximan al juego matemático y a un modo de pensar en geometría que sólo existe si la escuela lo provoca.

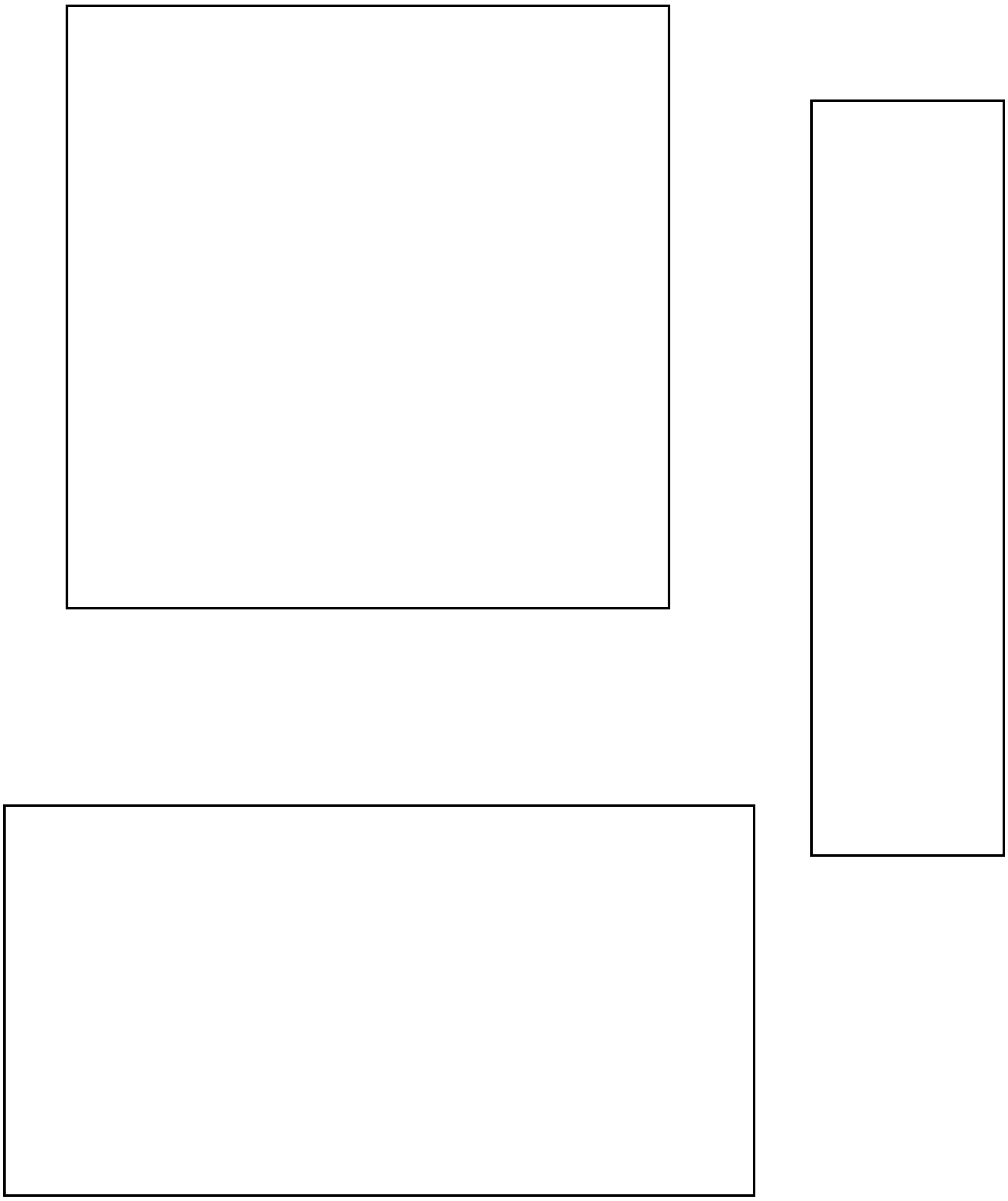
[45] BERTHELOT,R y SALIN,M-H.(1992) p3.

ANEXOS SECUENCIA 5° GRADO

Anexo 1: correspondiente a la actividad 1:

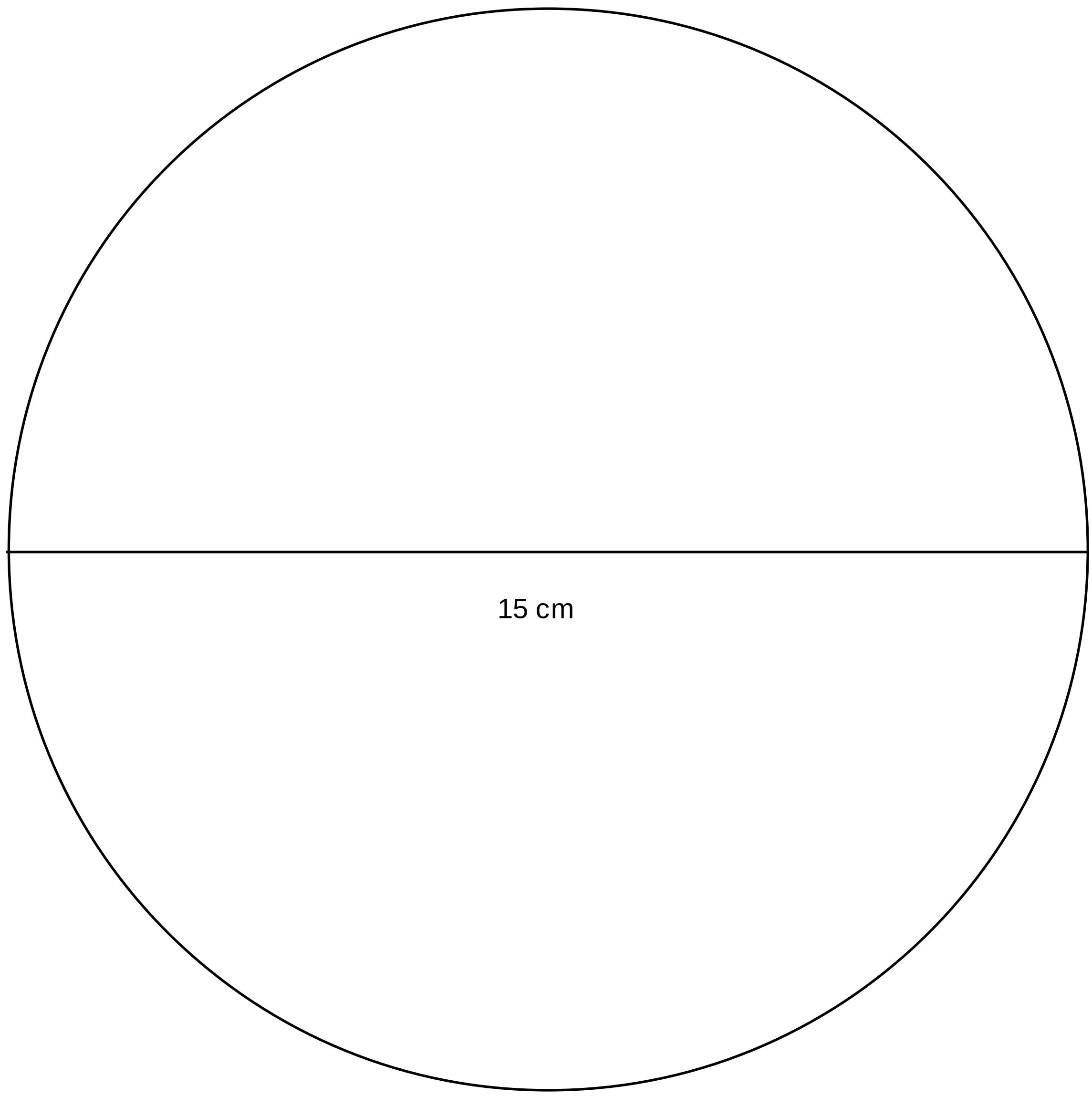


Anexo 2: correspondiente a la actividad 2:

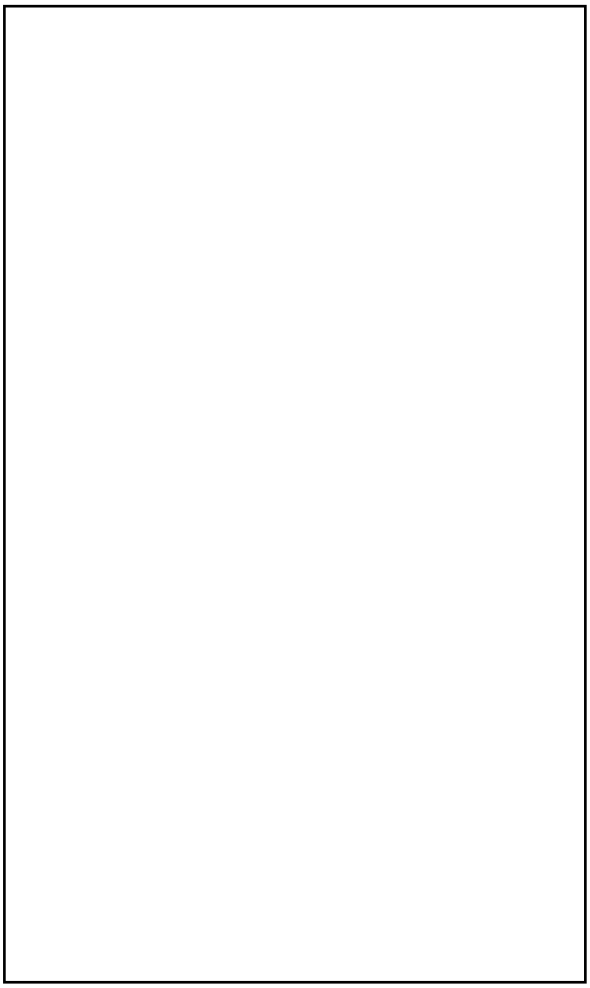


Anexo 3: correspondiente a la actividad 4:
Fase 1

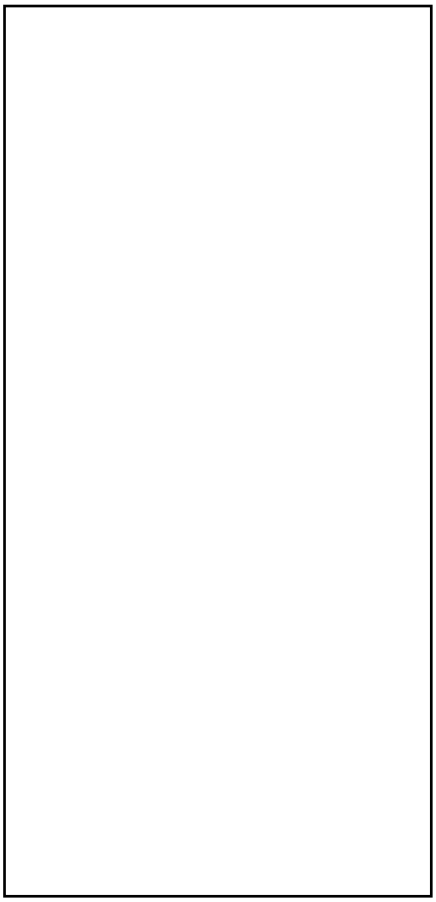
	Rectángulo A	Rectángulo B	Rectángulo C	Rectángulo D
Queremos saber				
Pensamos que				
Verificamos				



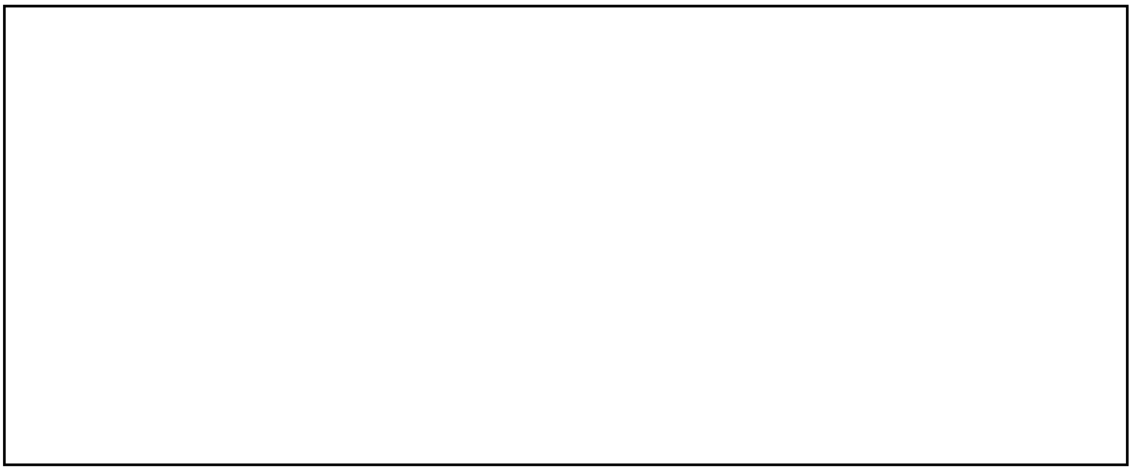
Rectángulo A



Rectángulo B



Rectángulo C



Rectángulo D

	Rect A		Rect B		Rect C		Rect D		Rect E		Rect F		Rect G		Rect H	
	Lado = 15 lado = 5		Diag = 12		Diag = 17		Lado = 9 lado = 12		Lado = 10 lado = 10		Diag = 15		Lado = 16 lado = 7		Lado = 13 lado = 8	
¿Se puede saber seguro sin probar?	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
Pensamos que																

<u>Instantáneas del aula</u>
Las diagonales del rectángulo:
una oportunidad para explorar, construir y discutir
Geometría 5to grado

<u>Actividad 1</u>
Exploración de la relación de inscripción entre rectángulos y circunferencias

Tal como se había previsto esta actividad introductoria fue sencilla y se resolvió rápidamente en todos los grados.
Reproducimos a continuación una parte de la puesta en común, en la que se retoma la noción de circunferencia vinculada a la idea de inscripción de figuras.

Un A. le muestra a la maestra un rectángulo que queda inscripto diciendo: -Este toca.
M.: -¿Este toca la circunferencia?
A.: -Sí.
M.: -¿Qué puntos tocan la circunferencia?
Algunos (poquitos) A.: -Los vértices.
M.: -¿Algún otro?
...
M.: -¿Saben cómo se dice? que está.
A.: -Incluido.
Otro A.: -Inscribido.
M.: -Inscripto. Está inscripto, quiere decir que el rectángulo calza justito, que los cuatro vértices del rectángulo, como dijo Laura, pertenecen a la circunferencia. ¿Cómo podemos definir circunferencia?
A.: -El conjunto de puntos que están alrededor del círculo.
Otro A.: -El borde del círculo.
Otro A.: - A una distancia, radio del círculo.
M.: -Ahí está, ¿a ver?
A.: -Los puntos que equidistan.
M.: -Ahí está. Es el conjunto de puntos que equidistan del centro. (Traza una circunferencia en el pizarrón). Los que calzan justito, cuando los vértices pertenecen a la circunferencia, decimos que están inscriptos. Los que quedan dentro o fuera decimos que no están inscriptos.

<u>Actividad 2</u>
Construcción de circunferencias a partir de las figuras inscriptas

Fase 1 Construcción de la circunferencia
Fase 2 Dictado del procedimiento al maestro

En dos de los quintos, tanto para el cuadrado como para los rectángulos se instaló muy rápidamente el procedimiento de marcar y trazar las diagonales. Veamos cómo lo formula una alumna:
Laura: -Tracé las diagonales y en el punto donde se cortan pinché el compás y la medida del radio fue hasta el vértice del cuadrado, y tracé la circunferencia.

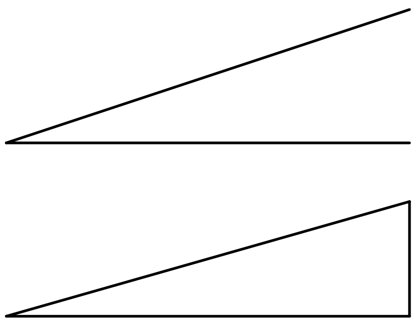
En otro quinto predominó el trazado de bases medias para encontrar el centro de la circunferencia y la diagonal permanecía implícita.
El docente planteó luego la alternativa que aparece en la ficha didáctica (cómo encontrar el centro sin medir) y los alumnos inmediatamente pusieron en juego las diagonales.

<u>Actividad 3</u>
Construcción de rectángulos a partir de sus diagonales

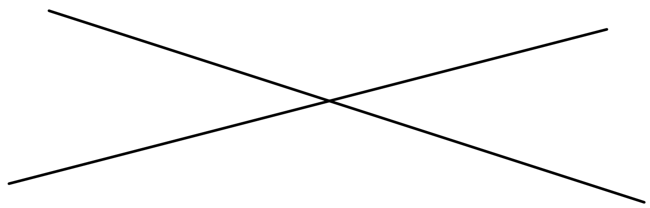
Fase 1 Construcción de rectángulos a partir de una diagonal (oblicua respecto de los lados de la hoja)

Reproducimos a continuación algunos procedimientos de los alumnos acompañados de la formulación de ellos mismos o de los comentarios del observador.

Ariel : -tracé la base luego la altura para que coincidiera con la diagonal, luego la base de arriba y la altura del otro costado, a lo último crucé las diagonales en su punto central. A simple vista parece un rectángulo ¿no?
Le pregunto si él sabe alguna manera de comprobarlo y me dice que deberían los ángulos ser rectos.



Otro alumno:
Facundo: - lo hice así: mido la mitad de la diagonal, tomo la medida 10,5,o sea que la mitad sería (piensa unos segundos) 5, 25, trazo la diagonal
(él ya lo tiene hecho, repite el procedimiento sobre la figura mientras lo relata) y ahora uno los puntos, listo.



Veamos otro alumno, de otro quinto, que busca resolver la construcción por la misma vía que Facundo, pero que "duda" de lo que obtiene.

Eduardo trata de construirlo a partir de las diagonales. Apoya la regla sobre la diagonal que está dibujada moviendo la regla alrededor del centro del segmento. Está muy concentrado. Cuando mira que sus compañeros hacen otra cosa, abandona su procedimiento y copia lo que hacen los otros. Muchos chicos hacen el rectángulo y después trazan la circunferencia.

La maestra se acerca a Eduardo:

M (a Eduardo): -¿Qué estás tratando de hacer?

E : -Quiero trazar la otra diagonal, pero no sé cómo trazarla.

(Lo que sucede es que "fija" un ángulo muy pequeño con la otra diagonal y no lo convence el rectángulo que le queda. Es decir, al obtener un rectángulo tan aplastado, desconfía):

<u>Fase 2</u> Idem a partir de una diagonal paralela a la base de la hoja

Tal como se preveía a los alumnos los desconcierta tener que tomar como diagonal un segmento horizontal. Veamos los primeros comentarios al presentarles la maestra la tarea:

A -¿esta es una diagonal? ¡¡¡NO!!! La diagonal tiene que estar inclinada. ¡¡¡¡Es imposible!!!!
Un alumno da vuelta la hoja para que le quede inclinada.

Otra alumna:

A muchos alumnos les resulta tan "inaceptable" esa posición para la diagonal que la toman como base media. Como hemos dicho esto tiene que ser señalado porque en ese caso dichos alumnos no han enfrentado el problema de construcción planteado.

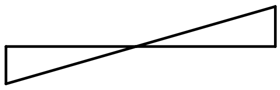
Algunos procedimientos
Alejandro:

Primero hizo un cm para "arriba" y para "abajo" a partir de los extremos de la diagonal y después trazó la otra diagonal

M (a Alejandro): -¿Cómo tienen que ser las diagonales?
A : -iguales.
M: -¿son iguales?
A: -no.
M: -¿se te ocurre otra forma? Alejandro copia el procedimiento de otro compañero.

A Ariel, de otro grado, le pasa algo parecido a Alejandro.

Ariel traza la otra diagonal por el punto medio, pero a la hora de trazar los lados prolonga una diagonal para que el lado le quede paralelo a los lados de la hoja. Le muestra su producción a Facundo y le pregunta: *"¿Esto funciona?"*



Facundo le señala el punto de cruce de las diagonales y le dice: "*Los dos pedazos de diagonales no son del mismo largo".*
Ariel trabaja un buen rato (parece estar "luchando" contra el paralelismo de los lados del rectángulo respecto de los bordes de la hoja) hasta que, controlando con la regla que las dos diagonales tengan la misma longitud, se decide a hacer lados no paralelos a los bordes de la hoja. Le muestra contento su producción a la observadora.

Veamos el procedimiento de un alumno que utiliza la inscripción en la circunferencia para resolver la construcción.

Gonzalo: -yo encontré un procedimiento extra simple. Al segmento le busco el punto medio, trazo la circunferencia y después trazo cualquier otra línea que pase por el punto medio.
(Se lo muestra al maestro trazando a mano alzada en el pizarrón.)
Le pide a Gonzalo que explique.
G: -Al segmento le busco el punto medio midiendo o con la mediatriz. Hago la circunferencia y trazo otra línea cualquiera que pase por el vértice.
M: -¿por el vértice?
G: -el punto central.
M: -¿y por qué pasa eso?
G: -porque es el punto central de la circunferencia y de las diagonales.

Otros alumnos, que han realizado el mismo procedimiento, lo describen de este modo:
M a As: -¿Cómo lo están haciendo?
A1: -primero buscamos el punto medio con la regla. Marco una circunferencia.
A2: -ahora de cualquier parte trazo un segmento que se corte en el punto medio de la circunferencia y uno los lados.
A1: -trazamos la circunferencia para que esté inscripto el rectángulo.
A2: -yo la traté a la diagonal como si fuera el radio.

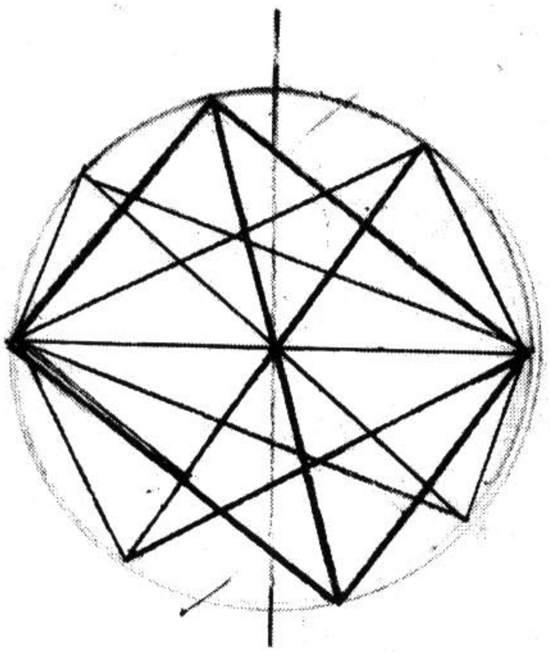
<u>Fase 3</u> Idem sin usar la escuadra

En algunas clases los procedimientos posibles para resolver esta fase aparecieron en la fase 2 y ya fueron descriptos.

En la ficha didáctica aparece en la fase 2 una segunda consigna que propone a los alumnos el desafío de construir otros rectángulos a partir de la misma diagonal con la que construyeron uno.

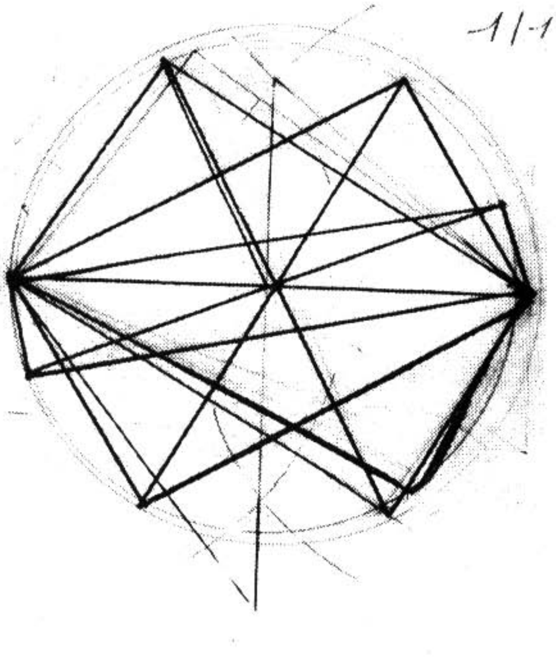
En la experiencia realizada fueron, en varios casos, los alumnos mismos los que dijeron que se podían hacer "*montones"* de rectángulos a partir de la misma diagonal. Se mostraban contentos al haber encontrado un procedimiento que les permitía hacer uno, y otro y otro rectángulo. Veamos algunas de sus producciones.

Victoria
1/10/97

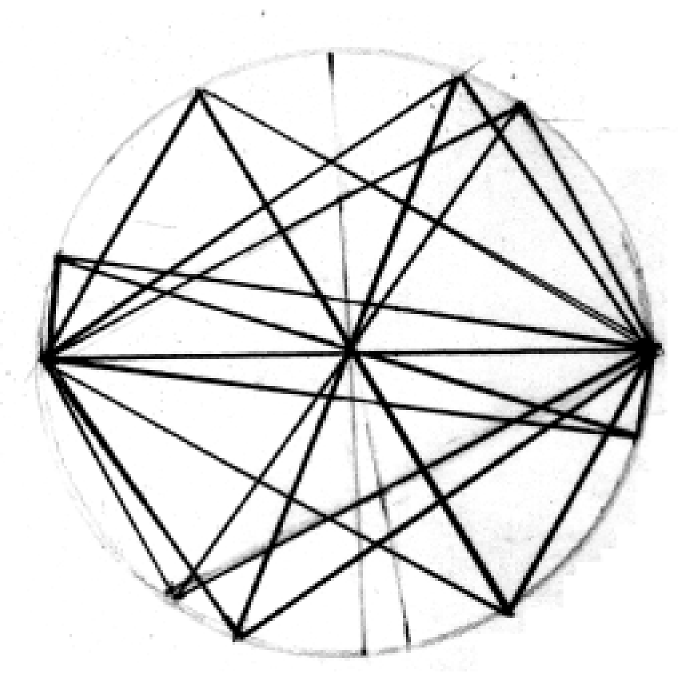


maximiliano

1/-10/97.



Laura . .. 6º A // 01-10-97



<u>Actividad 4: Análisis de la relación "..está inscripto en..." a partir de informaciones sobre rectángulos y circunferencias</u>

<u>Fase 1</u> Obtención de datos y tratamiento

Problemas abiertos, como éste que se ha planteado, son una oportunidad para que los alumnos pongan en juego sus concepciones, expliciten sus puntos de vista y, en muchos casos, detecten la parcialidad o incluso el carácter erróneo de lo que han planteado.
Han estado trabajando con las diagonales del rectángulo pero ésta es la primera actividad en la que involucran medidas de los lados y de las diagonales.

Vamos a ver que uno de los alumnos está convencido de que la diagonal, *"como es algo de adentro"*, tiene que medir menos que el lado más largo del rectángulo.

En el grupo de Gabriel están pensando qué medidas pedir.
Silvia: -¿Cuánto miden las diagonales?
Gabriel: -No, no tiene sentido. Porque estamos en el rectángulo, lo de adentro no creo que tenga mucha importancia, porque tenemos que averiguar si está inscripto o no está.

Después de conversar un poco decidieron pedir las medidas "del largo y el ancho"

(Cuando el grupo de Gabriel tiene las medidas.)
- *No está inscripto.*

Maestra: - Chicos, yo no entendí por qué no servían las diagonales para averiguar si estaba inscripto o no.
Gabriel: - Da el mismo resultado. Al no tocar el rectángulo (se refiere a los lados), menos lo pueden hacer las diagonales porque se quedan acá adentro (señala el interior de un rectángulo trazado con el dedo sobre el banco), miden menos que el rectángulo.
Maestra: -A ver, prueben.
Piden la medida de la diagonal: 14,6.
Gabriel: -¿De largo? ¡¡Mide más que el rectángulo!! Porque el rectángulo mide 12,5 y la diagonal 14,6... ¿Será porque las diagonales son rectas y las rectas son infinitas? ..... ¿Será porque al ser diagonal mide más?
La M. le sugiere hacer un rectángulo cualquiera. Gabriel traza un rectángulo, mide uno de los lados mayores y la diagonal: -Mide más, al ser diagonal, por eso... o porque lo de adentro es más grande que lo de afuera.

Un poco después Gabriel se ha convencido de la importancia de las diagonales para la tarea que están realizando.
Ante la pregunta de la maestra respecto de que información van a pedir para el próximo rectángulo Gabriel le dice lo siguiente a su equipo.

Gabriel: -Las diagonales, porque con la pregunta que hizo ella (Silvia, para el rectángulo A) veíamos que las diagonales eran más grandes que el rectángulo. Las diagonales son mayores que el rectángulo, entonces las diagonales pueden pasarse, entonces podemos saber lo que pasa.

Gabriel ha modificado una idea que tenía ("Lo de adentro no puede ser mayor que lo de afuera") pero todavía no es muy precisa la nueva idea ya que está comparando, sin distinguir, una longitud con una superficie ("diagonales más grandes que el rectángulo"). Sí le resulta claro el rol que cumple conocer la medida de las diagonales para determinar si hay o no inscripción del rectángulo.

Es muy frecuente que cuando un equipo trabaja frente a un verdadero problema se produzcan discusiones, comentarios, etc. reveladores de ideas que tienen los alumnos sobre los objetos que están tratando. Si el docente ha podido registrarlas es importante que en la puesta en común proponga retomar la cuestión, por ejemplo en este caso pidiéndole al equipo de Gabriel que cuente a los demás lo que aprendieron sobre la diagonal del rectángulo. Favorecer que los alumnos realicen formulaciones del tipo: "Antes creíamos que...(Algo de adentro no puede ser mayor que lo de afuera), ahora sabemos que...(la diagonal tiene una longitud mayor que cada uno de los lados del rectángulo)" es contribuir a que los alumnos hagan "públicos" sus aprendizajes y tomen conciencia de la transformación de ideas que el aprender implica. Es tan importante el rechazo explícito de las ideas erróneas como la formulación lo más adecuada posible de las nuevas ideas.

El análisis de las relaciones que están en juego en este problema en sus dos fases prácticamente no es posible si no se establece con certeza que la diagonal tiene una longitud mayor que cada uno de los lados del rectángulo. En las puestas en común se evidenció que esto no era obvio para muchos chicos y, cuando lo establecieron, usaron este conocimiento para analizar los casos que se les presentaban. Veamos lo que dice Laura ante un rectángulo cuyos lados miden 12 cm y 9 cm (de la fase siguiente):

Laura: *En una de esas está inscripto porque la diagonal tiene que medir más que los lados. Nos acabamos de dar cuenta con el rectángulo A de que la diagonal tenía que ser mayor que el lado mayor del rectángulo. Capaz que se puede. No sabíamos porque no conocíamos esa propiedad del rectángulo.*

<u>Fase 2</u> Tratamiento de datos provistos

Para facilitar la lectura de los intercambios de los alumnos reproducimos aquí los datos ante los que trabajaban:

Rect A	Rect B	Rect C	Rect D	Rect E	Rect F	Rect G	Rect H
Lado =15 lado =5	Diag.=12	Diag.=17	Lado =9 lado =12	Lado =7 lado =8	Diag.=15	Lado =16 lado =7	Lado =13 lado =8

Veamos algunas de las discusiones al interior de los equipos mientras llenan las planillas:

Diego: -¿cómo un rectángulo va a tener un lado 15 cm y otro 5cm? No es un rectángulo.
Martín: -es facilísimo mirá los lados son así (le muestra con los dedos) uno es la base y otro es la altura.
D lee la pregunta nuevamente. Se puede saber...
M: -sí, se puede.
Martín: -si un lado mide 15 y el diámetro es 15 ya hay una parte inscripta.
D: -el diámetro está en todas partes.
Agustín y Alberto: el diámetro es igual al lado, pongamos que sí y que está inscripto (se refieren al rectángulo A, ponen eso).
Alberto: -el rectángulo B debería medir 15 para que esté inscrito.
Agustín: -el rectángulo C sobra porque mide más de 15, es más grande que el diámetro.

En este grupo analizan correctamente los casos en los que el dato es la diagonal, pero todavía no registran la incompatibilidad entre este análisis y la decisión que han tomado para el rectángulo A, en el que el lado mide 15 cm.

Es muy interesante la discusión en el siguiente grupo (único grupo, sobre siete en este grado que responde, ante algunos rectángulos, que no se puede saber sin probar). Van pasando de un rectángulo a otro, muchas veces sin agotar la discusión, pero el “itinerario” que recorren parece ir de los casos más certeros a los menos.

María: -yo pienso que como la diagonal es el diámetro de la circunferencia entonces este (F diag. 15 cm) iría justo.
Natalia: -el rectángulo C (diag. 17 cm) sobresale.
María: -el rectángulo A (lado 15 cm) me parece que está inscripto.
Gonzalo: -un lado no puede ser igual a la diagonal.
Natalia: -al rectángulo B (diag. 12 cm) le falta.
Gonzalo: -para mí al D le falta.
María: -depende. Porque una diagonal mide más que un lado, puede ser que le falte o no.
Gonzalo: -al rectángulo E es casi seguro que le falta.

María: -al rectángulo G le sobra, sobresale, porque el lado es mayor que la diagonal. ¿Y el A?
Gonzalo: -para mí sobresale porque la diagonal va a medir más que el lado y el lado ya es 15 cm. Para mí el H (lado 13 cm) sobresale.
María: -pero la diagonal no puede medir dos cm, más que el lado, ¿o sí puede medir?
Maestro: -¿pueden saber seguro?
G: -no, sin probar no.
Contestan que no se puede saber para D.
G propone que E (lado 7 y 8) tampoco se puede saber.

Como ya dijimos, este fue el único grupo que incluyó la posibilidad de no poder responder con seguridad. Esto quedó evidenciado cuando el maestro propuso confeccionar un cuadro síntesis de lo que proponía cada equipo.

Rectángulo	/ ¿Se puede saber sin probar?	/ Pensamos que:(Sobra, falta, inscripto)
A	*Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*S- S- I- I-I-I*
B	*Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*F-F-F-F-F-F*
C	*SÍ - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*S-S-S-S-S-S*
D	*NO- Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*?-S-F-F-F-F*
E	*SÍ - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*F-S-F-F-F-F*
F	*SÍ - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*I-I-I-I-I-I-I*
G	*SÍ - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*S-S-S-S-S-S*
H	*NO- Sí - Sí - Sí - Sí - Sí - Sí -*	*?-S-F-F-F-F*

Cuando analizan el cuadro ven que hay coincidencias para algunos rectángulos y dan sus razones. Por ejemplo para G:

Violeta: *el lado mayor es mayor que la diagonal que necesita para estar inscripto.*

El maestro señala también las diferencias. Cuando van a analizar el caso del rectángulo A (para el cual dos grupos dicen que sobresale y cinco que está inscripto) varios de los equipos que se habían equivocado reconocen su error. Como planteamos en la ficha didáctica es importante permitir estas correcciones por parte de los alumnos siempre y cuando se basen en argumentos.

En un momento el maestro propone analizar las respuestas dadas para el rectángulo D:
Maestro: -vemos el D,vos Martín dijiste que falta, ¿por qué?
Martín: -porque si un lado mide 12 es menos que 15, me acabo de dar cuenta de que...
AL: -que no se puede saber.
Martín: -la diagonal va a ser mayor que 12 y que 9 pero cuanto...
H: -con los datos que tenían ¿se puede saber seguro? Ustedes dijeron que falta.
Diego: -Ahora sabemos que no se puede saber.

Para el mismo rectángulo una alumna no está convencida de retirar lo que habían propuesto:

Cinthia: -yo pienso que falta porque las medidas son menores.
Alumna: -yo no estoy muy segura.
Maestro: -¿qué te preguntan?
Cinthia: -¿podés estar seguro? Más o menos. La idea que tengo creo que está bien pero lo tengo que probar.
Maestro: -pero ahí dice sin probar.
Cinthia: -pero quizás cuando pruebo tengo razón.

Esta última discusión es muy interesante ya que Cinthia reconoce que tiene que probar pero como anticipa que "va a tener razón" al probar, esta "seguridad" le cuestiona contestar que "no se puede saber".
Como hemos dicho para los alumnos representa un fuerte (y largo) aprendizaje saber en que terreno se están situando: ¿pruebas empíricas o pruebas intelectuales? ¿Datos provenientes de las experiencias o anticipaciones a partir de datos y relaciones?

Estas últimas "Instantáneas del aula" reenvían a las preguntas con las que se inicia la primera parte de este documento, cuando se plantea y se comienza a desplegar el complejo juego entre lo experimental y lo anticipatorio.
Esta "circularidad" es representativa de algunas de las intenciones que hemos tenido al elaborar este documento. Hemos querido que las reflexiones más generales sobre las características de la geometría y sobre la construcción de conocimientos de geometría por parte de los alumnos brinden un marco tanto para pensar opciones relativas a la enseñanza –incluso las aparentemente pequeñas- como para interpretar lo que los alumnos hacen y dicen en distintos momentos de sus aprendizajes.

A modo de cierre

Hemos planteado en la introducción de este documento la preocupación compartida por la escasa presencia de problemas en la enseñanza de los conocimientos geométricos. Sabemos de la dificultad de plantear problemas en Geometría en este nivel de enseñanza dada la complejidad del objeto de estudio y de las condiciones que deben cumplir las situaciones propuestas a los alumnos.

A partir de esta preocupación nos hemos propuesto ofrecer una herramienta de trabajo que permita a los docentes reflexionar sobre la enseñanza de la geometría, sobre las prácticas, y ayude a gestar en las aulas propuestas de enseñanza que permitan mejorar los conocimientos geométricos de nuestros alumnos y - por qué no - sus relaciones con el saber matemático.

También hemos intentado mostrar de un modo más general, una cierta concepción de enseñanza de la geometría que permita a los alumnos introducirse en el modo de pensar propio de la geometría. En este sentido en el Documento Nº 1 planteábamos: *"Lo que se propone la enseñanza de las Matemáticas no es solamente la transmisión de conocimientos matemáticos, sino, tratar de hacer que los alumnos entren en el juego matemático, en la cultura matemática".*

En el mismo documento planteábamos: *"estamos concibiendo el quehacer matemático como una práctica social de argumentación, defensa, justificación, formulación y demostración que solo tiene sentido en un contexto de trabajo con otros".* Desde esta perspectiva intentamos ofrecer a los docentes herramientas específicas que permitan instalar en la clase condiciones de trabajo que favorezcan una construcción colectiva del conocimiento matemático.

Por ello explicitamos para las situaciones presentadas una cierta organización de la clase, el rol de la puesta en común, el tipo de avances que debería provocarse en los alumnos, el tipo de errores esperables en cada problema, las posibles intervenciones del maestro, de tal manera de que el docente tenga más elementos para tomar decisiones en la clase que permitan generar dicho contexto colectivo de trabajo.

Hemos resaltado la importancia del trabajo colectivo de los alumnos en la clase. Pero también confiamos en la fuerza del trabajo colectivo entre docentes para la construcción del saber sobre la enseñanza. Por ello nuestro documento está dirigido al equipo docente en su conjunto. Para poder constituirse en verdadero objeto de discusión, análisis y debate.

Esperamos recibir sus comentarios sobre este trabajo para que este equipo pueda también revisar su propia producción y mejorar la calidad y comunicabilidad de las propuestas.

BIBLIOGRAFÍA

-Arsac,G. (1994): "Verité des axiomes et des théorèmes en Géométrie. Vérification et dèmostration". Petit X 7. Irem de Grenoble.

-Arsac,G. et al (1992): "Initiation au raisonnement déductif au collège". Presses Universitaires de Lyon.

-Balacheff, N. (1987): "Processus de preuve et situations de validation". Educational Studies in Mathematics. Vol 18.

-Balacheff, N. (1987): "Devolution d´un probleme et construction d´une conjecture. Le cas de la somme des angles d´un triangle". Cahier de Didactique des Mathematiques 39. Irem de Paris 7.

-Berthelot, R. y Salin, M.H. (1992): "L´enseignement de l´espace et de la géométrie dans la scolarité obligatorie". Thèse. Université de Bordeaux I.

-Fregona, D. (1995): "Les figures planes comme "milieu" dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques". Thèse, Université de Bordeaux I

-Fregona,D. (1995): "Diferentes dominios de declaración sobre las figuras". Ponencia de la IX CIAEM. Chile.

-Gálvez,G.: "La Geometría, la psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental". En Parra,C y Saiz (comp), Didáctica de Matemática. Paidós, Bs As, 1994.

-Grenier,D. (1988): " Construction et étude du functionnement d'un processus d'enseignemient sur la symétrie orthogonale en sixième", Thése Universite J. Fourier, Grenoble

-Laborde,C. (1990): "L´enseignement de la géométrie en tant que terrain d´exploitation de phénomènes didactiques". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 9.3

-Laborde ,C. (1991): "Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situaciones d'apprentissage en mathématiques". En Après Vygotski et Piaget, Pédagogies en Développement Recueils. De Boeck Université.

-Laborde,C. y Capponi,B. (1994): "CABRI-GEOMETRE Constituant d´un milieu pour l´aprentissage de la notion de Figure géometrique". Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 14.12. La Pensée Sauvage Editions.

-Margolinas,C. (1993): "De l'importance du vrai et du faux dans la classe de Mathématiques". La Pensée Sauvage, Grenoble.

-Martinez,R. y Porras,M. (1997): "Un enfoque alternativo de la Enseñanza de las figuras en el Plano en la E.G.B.". Revista de Educación Matemática. Vol. 12 Nro 3. Universidad de Córdoba.

-Martinez,R. y Porras,M. (1998): "La Geometría del Plano en la Escolaridad Obligatoria.".Revista Novedades Educativas Nro 78. Bs.As.

-Fuenlabrada,I. et al (1986): “Los Cuadriláteros y sus Diagonales”. Laboratorio de Psicomatemática Nro 7. DIE. CINVESTAV. México.

-Saiz,I. (1996): “El aprendizaje de la Geometría en la EGB”. Revista Novedades Educativas 71. Bs. As.

DOCUMENTOS CITADOS:

-Broitman ,C. e Itzcovich,H.(1991): “Taller de Resolución de Problemas”. Dirección de Currículum. Secretaría de Educación de la M.C.B.A.

-Parra,C. ; Broitman,C. e Itzcovich,H. (1995): “Documento de Actualización Curricular 1. Matemática”. Dirección de Currículum. Secretaría de Educación. M.C.B.A.

-Parra,C. ; Broitman,C. e Itzcovich,H. (1995): “Documento de Actualización Curricular 2. Matemática”. Dirección de Currículum. Secretaría de Educación. M.C.B.A.

-Parra,C. ; Saiz,I. y Sadovsky, P. (1994): “Matemática y su Enseñanza”. Documento Curricular. Profesorado de Enseñanza Básica. Programa de Transformación de la Formación Docente. Ministerio de Cultura y Educación.

ORGANIZACIÓN DE LAS INTERACCIONES DE LOS ALUMNOS ENTRE SÍ Y CON EL MAESTRO[46]

"Un aspecto central en la enseñanza que propugnamos está constituido por la organización de las interacciones de los alumnos entre sí y con el maestro. En un plano, la naturaleza y el sentido de esta interacción están contenidos en una concepción educativa general y son (o deberían ser) compartidos por los enfoques de las diversas áreas. En otro plano, para que cobren pleno sentido, deben articularse específicamente en el área y en función de contenidos determinados.

Hay dos textos de Guy Brousseau muy elocuentes en este sentido:

"*Saber matemática no es sólo aprender las definiciones y los teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos; sabemos bien que hacer matemática implica que uno se ocupe de los problemas. No hacemos matemática sino cuando nos ocupamos de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar las buenas preguntas es tan importante como encontrar las soluciones. Una buena reproducción por parte del alumno de una actividad científica exigiría que actúe, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que las intercambie con otras, que reconozca aquellas que son conformes a la cultura, que tome aquellas que le son útiles, etc.*"[47]

*"No se trata sólo de enseñar los rudimentos de una técnica, ni siquiera los fundamentos de una cultura científica: las matemáticas en este nivel (*se refiere a la escolaridad obligatoria) *son el primer dominio – y el más importante- en que los niños pueden aprender los rudimentos de la gestión individual y social de la verdad. Aprenden en él – o deberían aprender en él- no sólo los fundamentos de su actividad cognitiva, sino también las reglas sociales del debate y de la toma de decisiones pertinente: cómo convencer respetando al interlocutor; cómo dejarse convencer contra su deseo o interés; cómo renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma, para compartir lo que será una verdad común... Soy de los que piensan que la educación matemática, y en particular la educación matemática de la que acabo de hablar, es necesaria para la cultura de una sociedad que quiere ser una democracia.*

La enseñanza de la matemática no tiene el monopolio ni del pensamiento racional ni de la lógica ni de ninguna verdad intelectual, pero es un lugar privilegiado para su desarrollo precoz."[48]

El significado de los conocimientos que adquieren los alumnos proviene también del carácter que adoptan las actividades en las que se los produce. Resulta sustancial provocar la reflexión de los alumnos sobre sus producciones y conocimientos y para ello, la herramienta principal es la organización de actividades de discusión, de confrontación, en las que hay que comunicar, probar, demostrar etc. , actividades que involucran el trabajo en pequeños grupos, o entre grupos, o en la clase total ordenando y estimulando la participación en función de finalidades bien establecidas y claras para todos.

Sería erróneo creer que **todo** el conocimiento que se trata en las clases requiere de organizaciones y actividades como las mencionadas. Por el contrario el docente debe seleccionar aquellas nociones, conceptos, técnicas etc. que por su

---

[46] Tomado de Parra,C. ; Saiz,I. y Sadovsky,P.(1994) " Matemática y su enseñanza" Documento Curricular P.T.F.D.

[47] Brousseau, Guy (1986) "Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática" Traducción y edición I.M.A.F. Córdoba 1993.

[48] Brousseau, Guy (1991) "¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas?" Revista Enseñanza de las Ciencias, vol 9 Nº 1, España.

importancia, por su complejidad, por la heterogeneidad de concepciones con las que se vincula, etc. merecen un tratamiento como el que se sugiere.

"*Algunas pueden estar dadas directamente por el enseñante o por la lectura de un manual. El docente debe definir una estrategia para la distribución entre problemas y aporte directo para la organización del material que va enseñar y definir una estrategia de adaptación a las reacciones de la clase para una determinada organización.*"[49]

Vamos a referirnos a dos momentos importantes en las clases de matemática: la interacción entre pares y la puesta en común, advirtiendo que:

- si se desea que los alumnos entren en un funcionamiento como el sugerido, cualquiera sea el nivel del que se trate, el docente debe prever un conjunto de actividades destinadas, justamente, a instalar en su clase nuevas "reglas del juego". Fundamentalmente dirigidas a que los alumnos aprendan a realizar una porción mayor de trabajo independiente, a que se escuchen entre ellos, que otorguen valor a la palabra de un compañero y no sólo a la del maestro, a que aprendan a registrar su trabajo y comunicarlo, a revisar los errores y corregirlos, a asumir responsabilidades en el proceso y su evaluación. Estos objetivos pueden ser explícitos y se puede comprometer a los alumnos en reflexiones sobre el nivel de logro que respecto de los mismos van teniendo.
- aunque en un primer momento los aspectos de funcionamiento pueden ser prioritarios, las actividades no pueden ser planteadas en el "vacío" sino que deben plantearse en torno a contenidos específicos. Desde el inicio es necesario analizar qué tipo de actividad para qué tipo de contenido, aunque sin duda, tanto la experiencia que el docente mismo vaya teniendo en conducir de otra manera sus clases, como la que vayan teniendo los alumnos, van a favorecer una articulación más afinada entre ambos aspectos. Debemos reconocer que conducir un debate en la clase es de alto desafío para el docente y tiene muchos requerimientos de formación y de conocimiento. El docente necesita conocer muy bien el contenido de referencia, tener una representación de las posibles concepciones de los alumnos y saber también a través de qué medios va a hacer evolucionar los conocimientos producidos en dirección al saber al que se apunta.

Respecto de las interacciones sociales citaremos al equipo ERMEL[50], que plantea:

"Las interacciones entre pares aseguran diversas funciones y pueden tomar formas diversas. Pero ellas no se dan por sí solas y están por lo tanto bajo la responsabilidad del maestro.

Las interacciones pueden permitir a los niños:

- *apropiarse de las consignas de una situación: cada niño, frecuentemente después de un tiempo de trabajo individual, expresa, por ejemplo, el modo en que ha interpretado el enunciado, lo que no ha entendido, lo que le recuerda; la reformulación de otro niño puede permitirle comprender mejor;*
- *confrontar las respuestas elaboradas individualmente, comprender las divergencias eventuales para ponerse de acuerdo en una respuesta única;*
- *comunicar su método de solución y defenderlo contra las proposiciones diferentes si lo juzga necesario;*
- *comprender el proceso de otro, ser capaz de descentrarse de su propia investigación, cuestionarla, interpelarla;*
- *apreciar los elementos positivos de caminos diferentes, evaluar el grado de generalidad de cada uno;*

---

[49] Douady, R. (1984) "Relación enseñanza- aprendizaje. …

[50] E.R.M.E.L. (1993) Apprentissages numériques et résolution de problémes, Cours élémentaire I.N.R.P., Ed. Hatier, París.

- *identificar, a menudo de modo no convencional, un procedimiento, un camino "podríamos hacer como hizo Nicolás";*
  ¡Esta lista no es exhaustiva, aunque es muy ambiciosa!"

Veamos lo que el mismo equipo ERMEL plantea respecto de **las puestas en común** y de las **actividades metacognitivas**:

"El rol de mediador que juega el maestro se juega en diversos niveles. Es en principio aquel que se dirige a cada niño que le es confiado. Pero su rol se revela de manera crucial cuando el maestro trabaja con el conjunto de la clase en eso que llamamos "<u>las puestas en común"</u> (...) *En efecto es sin duda allí donde aparece más netamente toda la dimensión de mediación que caracteriza la tarea del docente, a quien pertenece actualizar, hacer circular, y si es posible analizar y poner a discusión por el conjunto de la clase la producción de tal alumno o de tal grupo de alumnos.*

Momento esencial de la acción didáctica, toda puesta en común se muestra difícil de conducir. Nosotros vamos primero a poner en evidencia las dificultades que puede encontrar un docente en esta fase de enseñanza, de manera de poder apuntar mejor a que apuntamos.

Estas dificultades se sitúan, en cierto modo, en dos registros opuestos:

-Una presentación exhaustiva y fastidiosa de las producciones

Se trata a veces de un momento vivido por los maestros y/o sus alumnos como "obligado" y del que no se ve casi el interés. Mientras que la maestra se consagra concienzudamente a una revisión casi exhaustiva de lo que cada uno ha hecho, los alumnos no se sienten verdaderamente concernidos por la producción de sus compañeros, se aburren. Este momento es vivido, en este caso, como una suerte de ritual fastidioso, más o menos lleno de sentido, y ciertamente, muy pobre pedagógicamente.

-Una corrección

A la inversa, después de haber dado un tiempo de investigación a sus alumnos, el maestro puede creer que es su deber poner rápidamente las cosas en su lugar. Concibe entonces la puesta en común como la ocasión privilegiada de comunicar a la clase -en fin- la "buena solución", aquella que él ha previsto desde el inicio de la clase. Pero, al hacer esto, el maestro substituye totalmente a los niños, a quienes niega el trabajo y la palabra. Distribuye las críticas y los elogios y confunde, de hecho, la puesta en común con una corrección (con lo que esta palabra puede tener de reductor, incluso de punitivo). Al imponer muy rápido, o al recibir, en una mirada más benevolente, un procedimiento particular, el docente hace un corto circuito, a menudo incluso sin saberlo, de lo que es el interés mayor de una puesta en común.

-La no intervención

Advertido de esos riesgos, el docente puede caer en otra trampa, aquella que consiste en prohibirse toda intervención, de manera de no interferir en la investigación de los niños. El se impone silencio, se retrae totalmente de la situación, librando a los alumnos a ellos mismos. Pero..¿se puede legítimamente esperar que estos últimos exhiban espontáneamente sus metodologías, alcancen a comunicar sus procedimientos originales, acepten no repetir lo que ya ha dicho otro, y sobre todo, devengan capaces de considerar en perspectiva la situación particular que acaban de estudiar?

(...) De hecho, y nosotros pensamos que esta primera observación permitirá en parte evitar el formalismo evocado precedentemente, es necesario en principio comprender que no existe una única forma para las puestas en común, por la simple razón de que no tienen todas las mismas funciones. En efecto, <u>la función de una puesta en común depende en parte del objetivo asignado a la situación propuesta:</u>

a) Si la situación es una situación de investigación muy abierta, nueva para los alumnos, cuyo objetivo es principalmente aprender a investigar, se espera que los alumnos se comprometan en procedimientos muy variados. ***La puesta en común consiste entonces en poner el acento sobre la riqueza y la diversidad de procedimientos empleados.*** *La maestra va a tratar de armar un inventario de procedimientos efectivamente utilizados por sus alumnos, de manera de poner en evidencia e incluso valorizar la multiplicidad, la originalidad. Es importante en este caso que la maestra sepa aprovechar la ocasión de desarrollar los modos de pensar llamados "divergentes", indispensables para la creatividad matemática. Pero tendrá que organizar la presentación y el análisis de los diferentes procedimientos de manera rápida y dinámica para conservar la atención de sus alumnos, no cansarlos, porque eso conduciría a que se quede sola trabajando en el pizarrón.*

b) En el sentido opuesto, si la situación apunta a la estabilización de una noción o de un procedimiento experto, ***la puesta en común es el momento de la institucionalización de ese saber.*** *La atención de todos los niños debe ser focalizada sobre ese elemento de saber, para que devenga una indicación segura de la que la palabra de la maestra se ha hecho eco. Es el eje del pensamiento convergente el que determina el estilo de esta puesta en común. Aun cuando los discursos no son siempre eficaces y no son suficientes, lo que diga la maestra debe permitir a cada niño comprender lo que se busca que adquiera, precisar lo que se acaba de hacer, adherir a los medios que se han elegido para ello. Estas marcas, estas indicaciones, provistas en el momento adecuado, le evitan a los alumnos sentirse llevados por caminos difusos y en los que no distinguen las salidas, los resultados.*

c) Entre esos dos casos extremo, en los que el trabajo del maestro no puede definirse de manera idéntica, o en los que el desarrollo de la puesta en común es diferente, existe, con seguridad, toda una gama de situaciones posibles. Puede tratarse, por ejemplo, no de un simple inventario exhaustivo de procedimientos, sino, a partir de un análisis que ha podido hacer el maestro antes de la puesta en común, ***de focalizar la atención sobre algunos de ellos, de manera de ayudar a los alumnos a tomar conciencia de su especificidad****: tal parece más económico, tal otro más "astuto". El rol del maestro es entonces permitir a los niños construir poco a poco, mentalmente, una suerte de jerarquía de los procedimientos utilizados, organización que debe permanecer flexible, siendo el principio de economía, con frecuencia, función de las capacidades de cada uno.*

d) Una puesta en común puede igualmente ser un momento privilegiado para ayudar a los niños ***a poner en evidencia las relaciones que existen entre diferentes procedimientos, las filiaciones, los parentescos.*** *(...) El pasaje de un procedimiento conocido a uno nuevo, reconocido como equivalente, no se produce para todos los niños en el mismo momento. El rol del maestro puede consistir entonces en señalar los niños que han utilizado procedimientos "vecinos", es decir, que ellos pueden comunicárselos e incluso apropiárselos.*

Función general de las puestas en común

Sin embargo, a pesar de esta evidente diversidad, el docente no debe perder de vista la dimensión fundamental y transversal a todas las puestas en común: se trata siempre de un momento de ***intercambio, de explicitación, de debate,*** *en el cual el lenguaje (principalmente oral pero muchas veces escrito o con apoyo en representaciones) va a jugar un rol determinante para permitir la elucidación del pensamiento.*

Poner en común, hacer público

Hay, por lo tanto, que hacer aceptar progresivamente a los alumnos las exigencias de una comunicación racional. No solamente los alumnos deben aprender –y pueden hacerlo en estos momentos– las reglas de la comunicación colectiva, sino que deben igualmente aprender a formular su propio pensamiento de manera de hacerlo accesible a otro, es decir, comenzar a explicitarlo, a justificarlo. Al mismo tiempo, aprender a tener en cuenta el pensamiento del otro, a contestar un argumento o a solicitar una explicación. Cierto, se trata de un trabajo de largo aliento y que alcanzará un desarrollo mucho más importante en el último ciclo de la primaria, pero que impone justamente una práctica regular, frecuente, rigurosa de la discusión colectiva.

Antes de estar plenamente interiorizada, la elucidación del propio pensamiento, la justificación de su punto de vista, se construye de manera interactiva: es al ensayar responder a los "¿por qué?" y a los "¿cómo?" de los otros alumnos y del maestro, que cada uno es llevado a volver sobre sus propias acciones, describirlas, a defenderlas, a tomar conciencia de su pertinencia y de su validez. Recíprocamente, es al interrogar los caminos de otros que cada uno puede, si la distancia cognitiva no es demasiado grande, hacer suyo un nuevo procedimiento, ampliar el campo de sus posibilidades.

Así, gracias a las exigencias colectivas de confrontación, sin cesar recordadas por el maestro, durante las puestas en común, el alumno toma poco a poco conciencia de su actividad mental: identificar los nuevos conocimientos, medir el grado de dominio adquirido ("yo sé que es lo que sé"), pero también reconocer lo que todavía no logra hacer solo ("sé que es lo que tengo que aprender todavía") y los medios de los que dispone para alcanzar ese objetivo. Estas tomas de conciencia se traducen, cada vez que se encuentra el medio de hacerlo, por un trazo escrito. (...)

Estas tomas de conciencia múltiples traducen la importancia que todo docente debe acordar a las actividades metacognitivas, es decir, a todo aquello que puede permitirle al sujeto volver sobre sus acciones, sus procesos intelectuales, sobre sus propias adquisiciones, poderosa palanca de progreso en el aprendizaje.