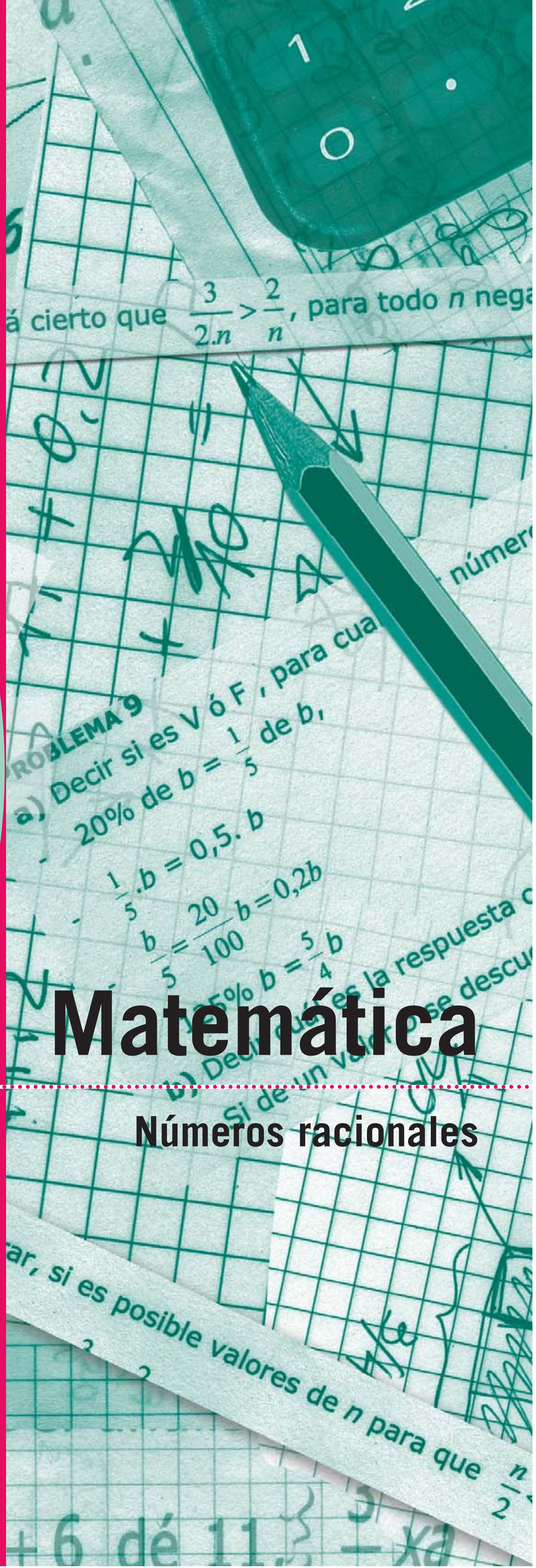
Aportes para la enseñanza. **Nivel Medio**

2006

Matemática

Números racionales



G. C. B. A.
Ministerio de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática

Números racionales

G.C.B.A.

Aportes para la enseñanza. NIVEL MEDIO

2006

Matemática

Números racionales

G. C. B. A.
Ministerio de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática números racionales - 1a ed. - Buenos Aires : Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2006.
96 p. ; 30x21 cm. (Aportes para la enseñanza nivel medio)

ISBN 987-549-309-0
1. Matemática-Enseñanza . 2. Números Racionales. I. Título
CDD 512.75

ISBN-10: 987-549-309-0
ISBN-13: 978-987-549-309-4

Ministerio de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula. 2006
Hecho el depósito que marca la Ley nº 11.723
Esmeralda 55. 8º.
C1035ABA. Buenos Aires
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Lic. Jorge Telerman

Ministro de Educación
Prof. Alberto Sileoni

Subsecretaria de Educación
Lic. Mara Brawer

Director General de Educación
Lic. Eduardo Aragundi

Director de Área de Educación Media y Técnica
Prof. Hugo Sereno

Directora de Área de Educación Artística
Prof. Beatriz Zetina

Directora General de Planeamiento
Lic. Ana M. Clement

Directora de Currícula
Lic. Marcela Benegas

Directora General de Educación Superior
Lic. Andrea Alliaud

G.C.B.A.

Matemática. Números racionales.
Aportes para la enseñanza. Nivel Medio

Elaboración del material
Dirección de Currícula
Equipo Central
Coordinación: Marcela Benegas
Graciela Cappelletti
Marta García Costoya
Marta Tenutto

Especialistas:
Haydée Barrero
Susana Beltrán
Fernando Bifano
Cristina Carpintero
Gema Fioriti
Horacio Itzcovich
Carmen Sessa
Silvia Veiga

Colaboración:
Carlos Álvarez

G.C.B.A.

Edición a cargo de la Dirección de Currícula

Supervisión de edición: Virginia Piera y María Laura Cianciolo
Diseño de serie: Adriana Llano y Alejandra Mosconi
Diagramación: Patricia Leguizamón, Adriana Llano, Alejandra Mosconi y Patricia Peralta
Corrección: Paula Galdeano y Cristina Pruzzo
Edición digital: María Laura Cianciolo
Apoyo logístico: Olga Loste y Jorge Louit

Matemática

Números racionales

G.C.B.A.

Presentación

El Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires desarrolla un conjunto de acciones dirigidas a promover una distribución equitativa del conocimiento, mejorar la oferta de enseñanza, y propiciar aprendizajes que les permitan a los estudiantes ejercer sus derechos ciudadanos, continuar con estudios superiores y acceder a un trabajo remunerado.

En esta línea, la Dirección General de Planeamiento a través de la Dirección de Currícula promueve el fortalecimiento de las escuelas medias y el mejoramiento de la experiencia educativa que ofrecen los establecimientos de ese nivel. Los programas de las asignaturas revisten especial importancia para el logro de los objetivos antes mencionados ya que, por su carácter de instrumento normativo, constituyen una herramienta para la tarea docente al establecer lineamientos de trabajo común y organizar la propuesta formativa alrededor de propósitos explícitos.

En este marco se elaboraron programas de 1º y 2º año del nivel medio*, sin modificación en su conjunto desde el año 1956. Esto contribuye a configurar un contexto propicio para la profundización de la reflexión y el fortalecimiento de la mirada pedagógica sobre los procesos de enseñanza en la escuela media.

Estos programas se realizaron considerando distintas instancias: una primera formulación por parte de equipos de especialistas de la Dirección de Currícula y, luego, reuniones sistemáticas de consulta con docentes del Sistema Educativo. Este trabajo, desarrollado durante los años 2001 y 2002, tuvo como resultado las versiones definitivas. Durante los años 2003 y 2004 se llevó a cabo un trabajo con profesores para el seguimiento de los programas y su implementación en las escuelas.

Los materiales curriculares que integran la serie "Aportes para la enseñanza. Nivel Medio", que a continuación se presentan, tienen su origen en los programas mencionados, en las consultas que se realizaron para su elaboración y en las acciones de seguimiento llevadas a cabo en ese sentido entre la Dirección de Currícula y los profesores del nivel.

Esta serie está concebida como una colección de recursos para la enseñanza, pretende atender al enfoque de los programas, favorecer las prácticas reflexivas de los profesores y colaborar con la lógica de organización de recursos por parte de la escuela, el departamento, la asignatura.

Cada título que integra la serie posee una identidad temática. Es decir, los recursos que agrupa cada material remiten a algún contenido especificado en los programas. Tal es el caso, por ejemplo, de "Las

* Programas de 1º año, Resolución 354/2003; y 2º año, Resolución 1636/2004, en vigencia. Corresponden a los planes de estudios aprobados por el Decreto PEN N° 6.680/56, la Resolución N° 1.813/88 del Ministerio de Educación y Justicia, y la Resolución N° 1.182/90 de la Secretaría de Educación de la M.C.B.A.

relaciones coloniales en América" en Historia, o "Números racionales" en Matemática. La elección del tema se ha realizado considerando uno o más de los siguientes criterios: se aborda aquello sobre lo que hay mayor dificultad para enseñar y/o mayores obstáculos para que los alumnos aprendan, aquello sobre lo que no hay suficientes recursos, o aquello sobre lo que lo existente no está tratado según el adecuado enfoque. Cada material tiene la impronta de la asignatura, y, según el caso, incluye diversos recursos: selecciones de textos para los alumnos, artículos periodísticos, mapas, imágenes (pinturas, grabados, fotografías, láminas), selecciones de videos, selecciones musicales, gráficos, propuestas de actividades.

Los seis títulos, que abren la presentación de esta serie, tienen diferentes características:

Biología. Los intercambios de materia y de energía en los seres vivos. Aborda contenidos del programa de 1º año: noción de modelo, concepto de sistema, estructura de la materia, estudio del modelo corpuscular, transformaciones químicas, composición de los seres vivos y de los alimentos, los seres vivos como sistemas abiertos, la obtención de materia y de energía, transformaciones de la materia y la energía en los ecosistemas. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados partiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y disco compacto con secuencias didácticas.

Geografía. Problemáticas ambientales a diferentes escalas. Atiende al bloque de contenidos "La diversidad ambiental en el mundo" del programa de 1º año. Para el desarrollo del tema se presenta una selección de artículos periodísticos, mapas y video.

Historia. Las relaciones coloniales en América. Para desarrollar el bloque de contenidos del programa de 2º año, se presentan fuentes testimoniales como la interpretación de historiadores, grabados, gráficos, documentos históricos, datos de población, normas y testimonios de la época.

Matemática. Números racionales. El documento presenta características diferentes de los anteriores. En relación con su producción, es el resultado del trabajo conjunto de un equipo de profesores de Nivel Medio de la Ciudad y especialistas de la Dirección de Currícula. Respecto de la propuesta didáctica, aborda el bloque Números, unidad Números racionales. Desde el trabajo matemático, promueve la identificación de "las dificultades en el aprendizaje", para profundizar la construcción de conceptos como: proporcionalidad y orden en Q+; fracciones como medida y orden en Q+; orden y densidad en Q; producto en Q+; conjeturas y validación de propiedades en Q.

Música. Taller de audición, creación e interpretación. El material presenta recursos para atender los tres ejes de los programas de 1º y 2º año (producción, apreciación, contextualización), con propuestas de actividades para el aula relacionadas con la audición, la creación grupal y la interpretación vocal. Incluye dos discos compactos con pistas de audio, partituras y fichas de trabajo.

Teatro. El espacio teatral. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje el concepto de espacio. Incluye un video que permite la apreciación de diversos tipos de escenarios, sus orígenes, su relación con el tipo de propuesta teatral.

Introducción

Este material se presenta como un aporte para los docentes en la compleja tarea de preparación de las clases y gestión del trabajo en el aula. Es el producto de la tarea conjunta realizada por profesores y especialistas de la Dirección de Currícula en algunas de las Escuelas Medias de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.

Los problemas seleccionados en este documento y las actividades propuestas a partir de los mismos buscan involucrar a los alumnos en una actividad de verdadera producción matemática.

Esto hace necesario crear en la clase un ambiente que aliente a los estudiantes a ensayar, producir diferentes resoluciones y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos. Los ensayos, resoluciones e ideas deberían constituirse en la materia prima a partir de la cual el docente organice las interacciones en la clase con el objeto de discutir sobre la validez, la precisión, la claridad, la generalidad, el alcance, etcétera, de lo que se produzca[1].

Se ha elegido abordar, en este documento, la temática de los números racionales. Esta elección se basa en el conocimiento de la complejidad que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de estos temas en el inicio de la escolaridad media. Aquí se abarcan contenidos referidos a la Unidad 3 del bloque *Números* de los programas de primero y de segundo año.

Este documento está organizado en cinco capítulos; cada uno aborda diferentes aspectos, íntimamente relacionados entre sí, de la noción del conjunto de números racionales.

En los **capítulos 1** y **2** se presentan problemas para los cuales los números racionales resultan ser la respuesta pertinente. En el **capítulo 1** se aborda la temática de la proporcionalidad, y en el **capítulo 2**, la medición. Son dos sentidos diferentes de los números racionales que, en cierta medida, se recuperan y profundizan en relación con el trabajo propuesto para la escuela primaria[2].

En la resolución de algunos de los problemas de estos dos capítulos es esperable que los alumnos recurran a las expresiones decimales de los números, para producir a veces respuestas exactas y otras veces respuestas aproximadas. Por ejemplo, para un problema cuya respuesta fuera $\frac{2}{3}$, muchos alumnos encuentran como más “acabado” responder 0,666, no periódico, porque siguen entendiendo el $\frac{2}{3}$ como una cuenta que debe ser realizada, y no como un número. Al respecto

1 Para profundizar sobre esta temática se recomienda la lectura del Documento nº 2, “La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar matemática”, G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, 2000. http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/

2 Para conocer la progresión en el tratamiento del tema, pueden consultarse: *Matemática. Fracciones y números decimales, 4º-7º grado, Apuntes para la enseñanza*, G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula, 2005.

resultaría necesario entablar una discusión en el aula sobre las diferencias entre estas dos expresiones. Por ejemplo, se podría analizar que: "$\frac{2}{3}$ (aun entendiéndolo como operación a realizar) multiplicado por 3 debe dar 2, en tanto que si se opera con 0,666..., al multiplicarlo por 3 no se obtiene 2".

Por otro lado, los problemas planteados en contextos extramatemáticos, como son los de estos dos primeros capítulos, introducen otro aspecto a discutir en el aula: en el plano de la realidad, siempre alcanza con las aproximaciones decimales, y ninguna medición con instrumentos podrá devolver una medida exacta. El número racional es la respuesta exacta en la modelización matemática de la situación real. Son ideas que habrá que ir construyendo a través de un trabajo sostenido.

La noción de equivalencia de expresiones fraccionarias así como la noción de orden en Q^+ son retrabajadas en cada capítulo a partir del sentido particular que se construye en cada contexto (proporcionalidad o medida). No se trata de que los alumnos apelen al uso de algoritmos memorizados, sino que tengan la oportunidad de desplegar estrategias "personales" que, les podrán permitir una reconstrucción de algoritmos ya conocidos pero probablemente no comprendidos.

La expectativa es que los estudiantes lleguen a identificar –producto del trabajo desplegado a través de los problemas presentados en estos dos capítulos– que el cociente de dos números enteros es un número, que no requiere de operación de finalización alguna, que se puede expresar con distintas escrituras fraccionarias y que, para ciertos cocientes, se tiene también una expresión decimal.

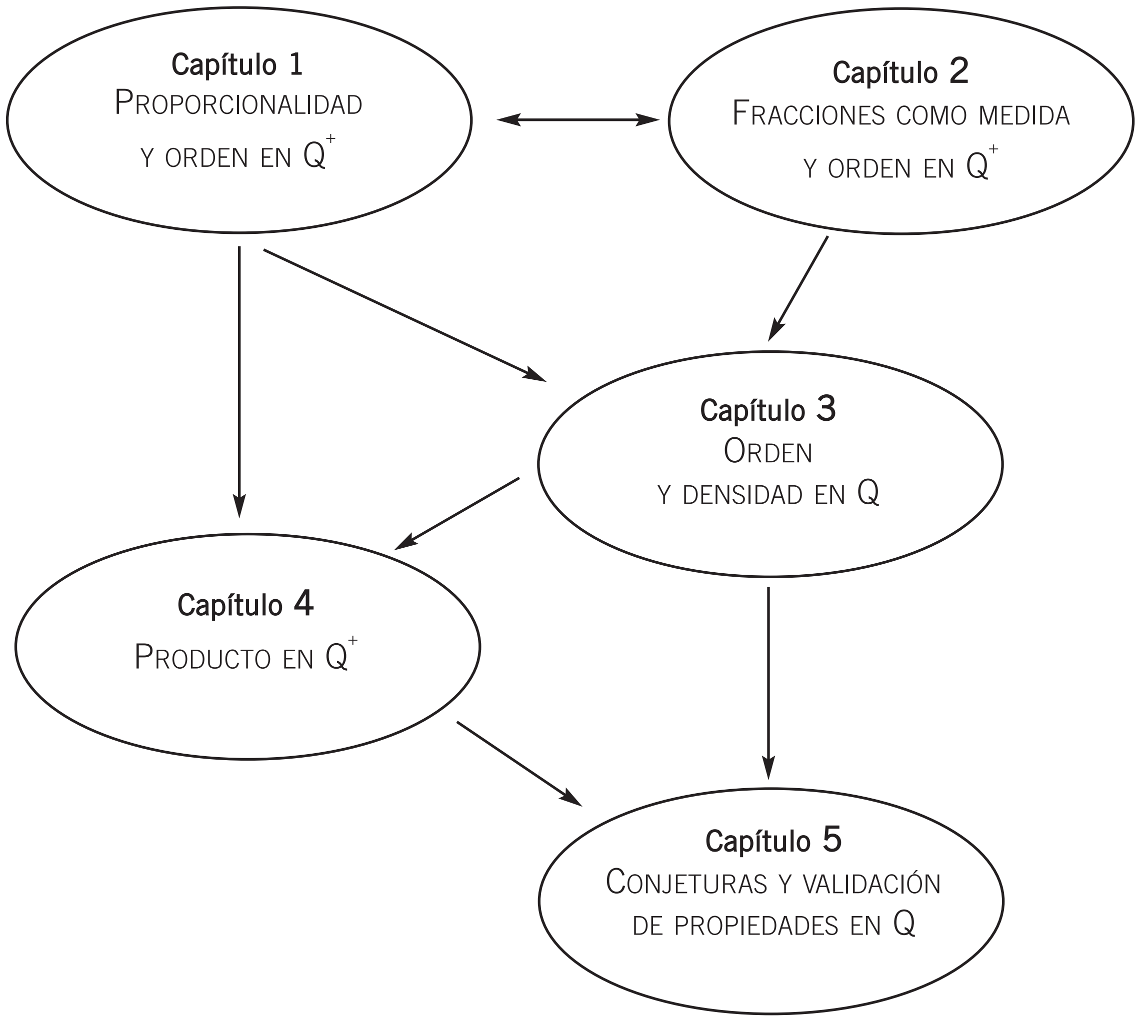
En los **capítulos 3**, **4** y **5**, muchos de los problemas aparecen directamente enunciados sobre números racionales, apuntan al estudio de las propiedades de estos números, el orden y las operaciones.

El **capítulo 3** aborda la problemática de la densidad de Q y un trabajo explícito de ubicación de los números racionales en la recta numérica.

En el **capítulo 4**, se trabaja el concepto de multiplicación en Q, operación que requiere una conceptualización diferente de la que pudieron haber elaborado los estudiantes para la multiplicación de números naturales, porque ya no es más una suma reiterada y multiplicar no siempre significa "agrandar".

La elaboración de conjeturas, la generalización de ciertas características que se atrapan a partir de exploraciones en ejemplos y la búsqueda de argumentos que permitan validar o rechazar las conjeturas producidas atraviesan, de algún modo, la totalidad del trabajo propuesto en este documento. Este tipo de tareas, central en la actividad matemática, pasan a ser el asunto del **capítulo 5**.

A continuación, presentamos un esquema que muestra recorridos posibles de los capítulos para la secuenciación del trabajo en el aula:



Los problemas, que se presentan en cada capítulo, se agruparon y ordenaron según un criterio de recorrido posible que permita ir desarrollando mayores niveles de complejidad. Sin embargo, no es la única secuenciación posible de problemas. Cada docente podrá saltear, adaptar, modificar, recortar, etcétera, en función de las necesidades y particularidades del grupo de clase con el que trabaje.

Una reflexión sobre los enunciados: el texto de cada problema en este documento no es necesariamente el que debe ser presentado a los alumnos. En la mayor parte de los casos se trata de situaciones que el profesor puede ir exponiendo a la clase con intercambio de ideas, propuestas de ejemplos, etcétera, hasta llegar a plantear una pregunta que derive en una instancia de trabajo independiente de los estudiantes. Es decir, el docente estaría acompañando a los alumnos a entrar al problema y el enunciado final será, de alguna manera, producto de un consenso con la clase.

La selección de los problemas que forman parte de cada capítulo se estableció a partir de las propuestas presentadas por los profesores, y fueron discutidos y reelaborados en el equipo de trabajo y posteriormente probados en el aula. En los comentarios que acompañan a cada problema, se incluye, muchas veces, una referencia explícita a esta experiencia.

Capítulo 1

Proporcionalidad y orden en Q^+

En este capítulo se proponen problemas en los que se pone en juego un aspecto del funcionamiento de las fracciones: la constante de proporcionalidad. Es decir, un "operador" que transforma una cantidad de una magnitud en su correspondiente de otra magnitud, mediante la multiplicación. Es un sentido de las fracciones diferente del que los alumnos podrían haber construido a partir de los problemas de reparto y medida, típicos de la escuela primaria[3].

Los primeros problemas que se presentan ponen en funcionamiento la idea de razón entre dos números. El requerimiento de comparar dos razones favorece la elaboración de criterios de comparación de números racionales, que cobran sentido en el contexto de cada problema.

Posteriormente, al solicitar la escritura de una fórmula que represente la relación de proporcionalidad en juego en cada problema, se plantea la necesidad de considerar cada razón como un número racional. Producir fórmulas para las funciones de proporcionalidad permite profundizar el conocimiento de los racionales. Al mismo tiempo, el trabajo con constantes racionales favorece el aprendizaje de la noción de relación de proporcionalidad. Por lo dicho, es un juego dialéctico entre lo numérico y lo algebraico.

En otros problemas, las propiedades de la proporcionalidad directa permitirán generar procedimientos "personales" para la multiplicación o la división de una fracción por un número natural u otra fracción, o para dar sentido a los procedimientos aprendidos.

Los primeros cinco problemas están en el contexto de preparar **mezclas de pinturas**.

3 Estos son sentidos que los alumnos deberían haber construido en su paso por la escuela primaria. Es probable que esos aprendizajes requieran una revisión. Para ello se recomienda consultar *Matemática. Fracciones y números decimales*, 4º-7º grado, *Apuntes para la enseñanza, ibid.*

Problema 1

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde.

a) Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 4 litros de pintura verde. ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si se ponen 7 litros de pintura blanca, ¿cuántos litros de pintura verde se deberá utilizar para obtener la misma tonalidad?

Comentarios sobre el problema

Para comenzar, puede ser necesario discutir con los alumnos acerca de que la conservación de la tonalidad necesita de la conservación de la relación entre la cantidad de pintura verde y la de pintura blanca que se usa.

La elección de los números 3 y 4 para la pintura verde, en el planteo inicial y en el ítem **a)**, es intencional ya que puede hacer pensar a los alumnos que se debe sumar 1 litro a cada cantidad de pintura, es decir, que harán falta 11 litros de pintura blanca. Este tipo de respuesta resulta un error frecuente. Por tanto, se trata de generar una discusión que lleve a encontrar argumentos para validar o rechazar esta respuesta. Por ejemplo, un criterio que los estudiantes podrían elaborar es que si para 3 litros de pintura verde se usaron 10 de pintura blanca, hay más del triple de blanca que de verde. Esta relación no se cumple en el caso de 4 y 11 ya que 11 no llega a ser el triple de 4.

Otra posibilidad es preguntar a los alumnos por cantidades "fáciles" cómo *¿cuánta pintura blanca se requiere para 6 litros de verde? ¿Y cuánta pintura verde se necesita para 30 litros de blanca?* El docente puede confeccionar una tabla de valores en el pizarrón para organizar las respuestas. La intención es poder confrontar una probable respuesta correcta para las cantidades "fáciles", con la respuesta "aditiva" que se dio para el caso **a)** donde se plantea cuánta pintura blanca se deberá usar para 4 litros de pintura verde, manteniendo la tonalidad.

Una solución que los alumnos podrían elaborar para resolver el ítem **a)** es pasar por la unidad. Resulta probable que, al recurrir a la calculadora para hacer 10 : 3, respondan utilizando escrituras decimales. Para muchos estudiantes, 3,33 es una respuesta correcta al problema. Entonces éste es el momento de plantear una discusión que permita, sin rechazar totalmente la respuesta, arribar a la conclusión de que ésta es aproximada. Por ejemplo, se puede explicitar que si fuera el resultado de $\frac{10}{3}$, al multiplicarlo por 3, debería dar 10, y no es así. Lo que está en juego es aceptar que $\frac{10}{3}$ es un número, y no una operación a realizar; probablemente se necesitarán varios problemas más para que todos los alumnos lleguen a aceptar esto.

G.C.B.A.

Muchos estudiantes pueden resolver "por regla de tres" o mirando una tabla de proporcionalidad. De este modo, es probable que lleguen directamente a la división 40 : 3, y respondan que para 4 litros de pintura verde se necesitan 13,33 litros de blanca. En este caso se requerirá una discusión análoga a la propuesta para 10 : 3.

Los alumnos familiarizados con escrituras periódicas podrían expresar las respuestas como 3,333... litros de blanca para 1 litro de verde, o bien 13,333... litros de blanca para 4 litros de verde, en lugar de utilizar $\frac{10}{3}$, o $\frac{40}{3}$. En estos casos, también sería conveniente promover una discusión sobre estas últimas escrituras que permita identificar que, a diferencia de las anteriores, éstas son respuestas exactas.

Se trata de poner en evidencia que el resultado de la división 10 : 3 es un número racional que admite diferentes formas de escritura: $\frac{10}{3}$ o 3,33..., o (en esta última escritura el entero $3\frac{1}{3}$ corresponde al cociente, y en la fracción $\frac{1}{3}$, 1 es el resto y 3 es el divisor). Análogamente, $\frac{40}{3} = 13{,}333\ldots = 13\frac{1}{3}$.

En cuanto al ítem **b)**, la diferencia que aporta es que ahora la unidad estaría representada por un litro de pintura blanca, que lleva a considerar la fracción $\frac{3}{10}$.

Problema 2

Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro?

Comentarios sobre el problema

Aquí se retoma lo trabajado en el **problema 1**; se puede esperar que los alumnos, a partir de la discusión anterior, rechacen la idea de que se conserva la tonalidad y comiencen a discutir cuestiones relativas a la comparación.

Para resolver este problema es necesario considerar que se trata de dos mezclas a comparar. Como resultado del trabajo con el problema 1, es probable que calculen los valores de blanco para un litro de verde en ambas mezclas (o los valores de verde para un litro de blanca), produciendo tanto respuestas exactas como aproximadas. En este caso, las respuestas decimales aproximadas alcanzan para responder a lo que se pide.

Otra posibilidad es estudiar qué pasaría con ambas mezclas para 6 litros de pintura verde:

Verde	Blanca
2	7
6	21

Verde	Blanca
3	8
6	16

La lectura de los datos de la tabla permite arribar a que la mezcla de la derecha es más oscura que la otra, sin necesidad de realizar ningún cociente, menos aún de considerar fracciones.

En un aula donde coexistan estas distintas estrategias es posible pensar en un trabajo que permita establecer relaciones entre ambas: por ejemplo, identificar que los resultados numéricos obtenidos en la estrategia 1 se obtienen dividiendo (en un orden adecuado) cualquiera de las filas de cada una de las tablas. Se está poniendo en juego de manera implícita la idea de fracciones equivalentes, noción que se trabajará en varios problemas de éste y otros capítulos.

La segunda estrategia equivale a buscar fracciones equivalentes a las dadas, con igual numerador o denominador, como procedimiento útil para comparar fracciones.

Problema 3

¿Será cierto que las siguientes mezclas permiten obtener la misma tonalidad?
Mezcla 1: 9 litros de pintura verde y 21 de blanca.
Mezcla 2: 15 litros de pintura verde y 35 de blanca.

Comentarios sobre el problema

En este problema se resignifica lo trabajado antes. Se espera que los alumnos usen cualquiera de las estrategias anteriores, o que reduzcan la cantidad de pintura para 3 litros de verde en cada mezcla. La estrategia de calcular números para la cantidad de pintura blanca necesaria para un litro de verde (o viceversa), en cada mezcla, puede ser introducida por el docente si es necesario. La discusión en torno de las distintas estrategias desarrolladas permitiría el establecimiento de nuevas relaciones matemáticas en la clase.

En este problema, la equivalencia de razones está asociada a la conservación de la proporción para lograr la misma tonalidad, y no a la conservación de la cantidad de pintura.

Problema 4

Se mezclaron 3 litros de pintura verde con 7 litros de pintura blanca.

a) ¿Qué otras cantidades mezcladas darán la misma tonalidad?

b) Escribir una fórmula que permita determinar la cantidad de litros de pintura de un color, en función de la cantidad de pintura del otro color.

Comentarios sobre el problema

En la primera parte de este problema, se pretende que los alumnos produzcan distintas razones equivalentes a $\frac{7}{3}$ ó a $\frac{3}{7}$ (antes de la producción de la fórmula solicitada, puede ser que los alumnos no estén trabajando con el número $\frac{7}{3}$, sino con la relación "3 es a 7"), y lleguen, si es posible, a comprender que las cantidades mezcladas que darán la misma tonalidad son infinitas.

En la segunda parte, se pide la **producción de una fórmula** que permita calcular la cantidad de una pintura en función de la otra. Escribir la fórmula permite institucionalizar que la constante de proporcionalidad es un número racional que expresa la relación entre las cantidades. Este número aparecerá expresado como distintos cocientes, según se consideren las distintas soluciones dadas en el ítem **a)**. Esto daría lugar a un trabajo sobre la noción de fracciones equivalentes. El objetivo no es que los alumnos memoricen la técnica de los "productos cruzados" para decidir sobre la equivalencia de fracciones, sino que se vayan construyendo en la clase criterios para decidir sobre la equivalencia a través del trabajo con los problemas.

Es probable que siga persistiendo en algunos alumnos su preferencia por trabajar con una aproximación decimal de la constante: 2,3 ó 0,42, según el sentido de la división que consideren. Más que rechazar la respuesta, es importante insistir en el carácter aproximado de la misma. Y plantear otras situaciones donde la escritura fraccionaria sea realmente más económica.

Por otra parte, no indicar cuál de las dos pinturas debe jugar el papel de variable independiente hará posible la producción de diferentes fórmulas. Estudiar la relación entre las dos fórmulas producidas permitiría un primer encuentro con la noción de **inverso multiplicativo**, tema que se aborda en el **capítulo 4** de este documento.

En la medida en que se haya avanzado en el trabajo con funciones y sus gráficos (otro bloque de los programas de primer y segundo año), se puede completar el trabajo con este problema solicitando una representación gráfica de la función. Si los alumnos realizan una tabla de valores para hacer el gráfico, puede ser la oportunidad para destacar el valor o la importancia de la escritura fraccionaria: por ejemplo, si se considera la expresión $\frac{7}{3}$ para la constante, puede resultar sencillo calcular la imagen de los valores 3, 6, 9 ó 12, mientras que los resultados que se obtienen usando la escritura aproximada decimal resultan mucho más engorrosos para representar.

Por otro lado, el denominador y el numerador de cada una de las posibles representaciones fraccionarias de la constante pueden ser identificados en el gráfico como valores de *x* e *y* de diferentes puntos; mientras que el número racional que resulta de cualquiera de estos cocientes se identifica con el valor de *y* para $x = 1$. En esta parte del trabajo está en juego la idea de pendiente de una recta.

Problema 5

Consideremos todas las mezclas de pintura que aparecen en los problemas anteriores:

Verde	Blanca
3	10
2	7
3	8
9	21
3	7

a) Ordenarlas de la más oscura a la más clara.

b) Escribir la fórmula de cada una de las mezclas, que exprese la cantidad de pintura blanca en función de la cantidad de pintura verde. Ordenar los 5 números racionales que se obtienen como constante.

Comentarios sobre el problema

Para resolver el ítem **a)** se espera que los alumnos desarrollen estrategias "artesanales" similares a las utilizadas para estudiar la equivalencia de razones. Nuevamente, no se apunta a la memorización de la técnica de "los productos cruzados". Por ejemplo, todas las mezclas que tienen 3 litros verdes se comparan con la cantidad de blanca. La que tiene 9 litros de verde, se puede relacionar multiplicando cualquiera de las anteriores por 3. La segunda mezcla se compara directamente con la última, razonando que a igual cantidad de blanca, la última tiene más verde y, por tanto, es más oscura.

En el ítem **b)** se pide a los estudiantes que escriban la fórmula. Una práctica común de los alumnos es que realicen la cuenta y escriban la fórmula usando la expresión decimal. Esto podría generar una discusión sobre las ventajas de la escritura fraccionaria que muestra en todo momento la relación de proporcionalidad entre las pinturas. La expresión decimal no deja traslucir esta información. Sin embargo, la aproximación decimal es eficaz para responder a la pregunta de la comparación.

Una vez producidas las distintas fórmulas, se podrán apoyar en el trabajo realizado en el ítem **a)**, para ordenar los distintas fracciones obtenidas. Como conclusión, sería interesante ir construyendo algunos criterios de comparación que derivan del trabajo hecho:

"Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador."
"Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador."

De igual modo, se podrá explicitar la estrategia de transformar una (o ambas fracciones a comparar) en otra equivalente para poder aplicar alguno de los dos criterios anteriores.

La comparación de fracciones será abordada nuevamente en el **capítulo 2** de este documento.

Los siguientes problemas proponen, también, un trabajo con relaciones de proporcionalidad directa. Se espera producir con los alumnos recursos que permitan multiplicar y dividir fracciones (ver también **capítulo 4**).

PROBLEMA 6

En esta tabla se presenta la cantidad de harina y agua que debe utilizarse para hacer vainillas.

a) Completar la tabla:

Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	....
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	....	....	....	2

b) Si se usa 1 kilo y medio de harina, ¿cuánta agua se necesitará?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

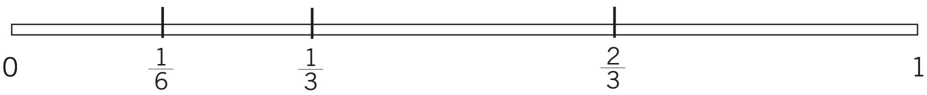
Para resolver el ítem **a)** de este problema, se espera que los alumnos desplieguen distintos razonamientos que les permitan completar la tabla. Por ejemplo, si para 1 kg de harina se utilizan $\frac{2}{3}$ litros de agua, para $\frac{1}{2}$ kilo de harina se necesitará la mitad de $\frac{2}{3}$ litros de agua. La cuestión a promover será, entonces, la búsqueda de la mitad de $\frac{2}{3}$. Para ello es posible que los alumnos recurran a diferentes tipos de representación de esta fracción (recta numérica, dibujos, etcétera) que permitan identificar $\frac{1}{3}$ como la respuesta. Es interesante, más allá de la representación seleccionada por los alumnos, que el docente solicite argumentos que den cuenta de que $\frac{1}{3}$ es la mitad de $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, "como dos veces un tercio es dos tercios, un tercio es la mitad de dos tercios".

No se espera que los alumnos recurran al algoritmo de cálculo de división de fracciones. En ese caso, obtendrían $\frac{2}{6}$ como resultado de $\frac{2}{3}$: 2; y sería necesario recurrir a la noción de fracciones

G.C.B.A.

equivalentes para confrontar esta solución con el $\frac{1}{3}$ que puede haber aparecido por otro procedimiento.

Para averiguar qué cantidad de agua se necesita para un $\frac{1}{4}$ kilo de harina, se podrá apelar a un razonamiento similar al anterior. Es decir, se necesitará la mitad de $\frac{1}{3}$ litro de agua, esto se puede calcular apoyándose, una vez más, en diferentes representaciones de la fracción. En particular, en la recta numérica es posible analizar que la mitad de $\frac{1}{3}$ está justo en el medio entre 0 y $\frac{1}{3}$, y que dicho número entra 6 veces en el entero, por lo tanto, deberá ser $\frac{1}{6}$:



Otra manera de resolverlo sería considerar la fracción $\frac{2}{6}$ (equivalente a $\frac{1}{3}$), que permite calcular la división por 2 dividiendo el numerador.

Para establecer la cantidad de agua necesaria para $\frac{3}{4}$ kg de harina, la multiplicación entre un entero y una fracción –apelando a sumas reiteradas– podrá ser un recurso eficaz. También podría ser que los alumnos sumaran las cantidades de agua correspondientes a $\frac{1}{2}$ y a $\frac{1}{4}$ kilos de harina. Confrontando las dos resoluciones, se llegaría a la igualdad $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, que puede ser objeto de análisis.

Para calcular la cantidad de harina que se necesita para 2 litros de agua, el recurso de analizar cuántos tercios equivalen a 2 permitiría discutir con los alumnos que $\frac{2}{3}$ x 3 = 2. La cantidad de harina se calcula, entonces, multiplicando 1 kilo por 3.

Para responder el ítem **b)**, se podrá pensar en que 1 $\frac{1}{2}$ kg es equivalente a la suma de 1 y $\frac{1}{2}$. Por tanto, sumando los correspondientes a estos valores, se obtendrá el resultado buscado: $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Otra posibilidad sería pensar que 1 kg y medio es dos veces $\frac{3}{4}$ kg; luego, se necesitarán dos veces $\frac{1}{2}$ litro.

Es interesante poder analizar la tabla completa, explicitando en ella los cálculos que han permitido obtener cada uno de los valores, por ejemplo:

: 2 : 2 x 3 x 2

Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	$1\frac{1}{2}$
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{3} = 1$

: 2 : 2 x 3 x 2

Será importante avanzar en la explicitación de las propiedades de la proporcionalidad que permitieron obtener los resultados. A partir de esto, se podrán hacer explícitos ciertos recursos de cálculo:

- Para multiplicar una fracción por un entero, se puede sumar reiteradamente o bien multiplicar el numerador por el número entero.

- Para buscar la mitad de una fracción, basta con duplicar el denominador.

Estos recursos desplegados no ponen aún en funcionamiento la idea de constante de proporcionalidad. Si ya hubiera alguna experiencia con este tipo de funciones, sería interesante proponer a los alumnos la búsqueda de una fórmula que permita determinar la cantidad de agua conociendo la cantidad de harina. Es esperable, en ese caso, que los alumnos puedan producir una fórmula del tipo $y = x \cdot \frac{2}{3}$, a partir de conocer el valor de y para $x = 1$.

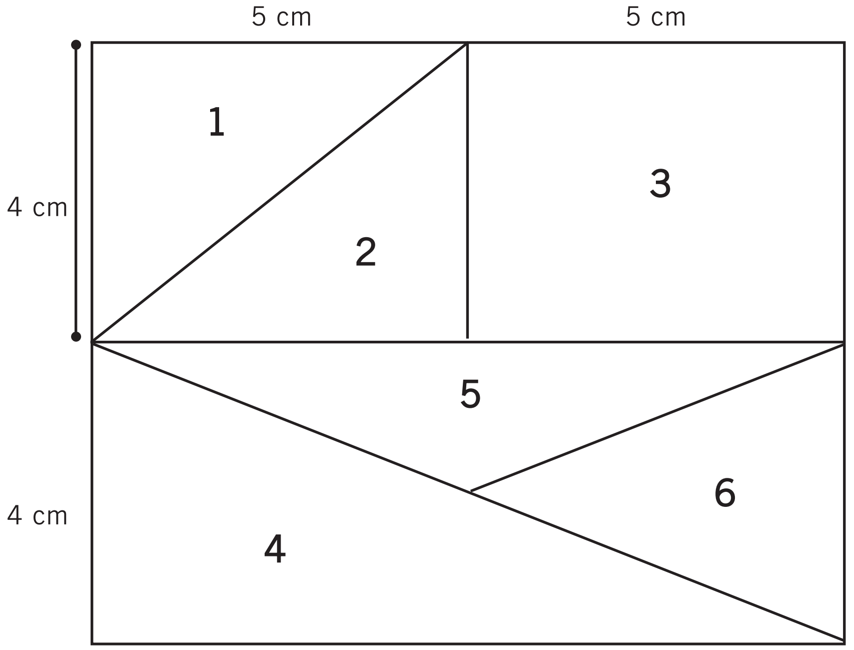
A partir del reconocimiento de la constante de proporcionalidad, será útil volver a la tabla con la finalidad de identificar que es posible "pasar" de la fila cantidad de harina, a la fila cantidad de agua, multiplicando por $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ (kilo de harina) multiplicado por $\frac{2}{3}$ da como resultado la cantidad de agua. Esto permitiría establecer que $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ tiene que dar como resultado $\frac{1}{3}$, y recuperar el algoritmo para la multiplicación de fracciones: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Del mismo modo se podrá concluir que $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y que $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1$.

De este modo, la **multiplicación de fracciones** toma sentido como herramienta para calcular, en una relación de proporcionalidad directa con constante fraccionaria, el correspondiente de un valor fraccionario. Y, al mismo tiempo, darle sentido al algoritmo de multiplicación de fracciones (numerador por numerador y denominador por denominador), que posiblemente algunos alumnos hayan aprendido en la escuela primaria.

Problema 7[4]

Organización de la clase: Los alumnos trabajan en grupos. Cada equipo recibe un sobre con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda en el escritorio del docente o en el pizarrón. El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:

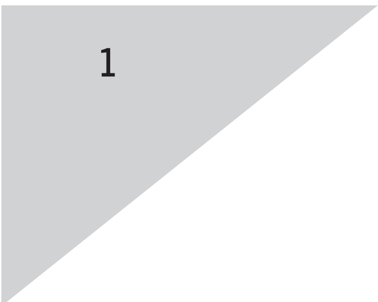
4 Este problema es una adaptación de la situación creada por Guy Brousseau conocida como "Ampliación del rompecabezas". Guy Brousseau. *Problemas en la enseñanza de los decimales. Problemas de didáctica de los decimales. Trabajos de Matemática.* FAMAF. Universidad Nacional de Córdoba, 1993.



a) El docente pedirá a cada grupo que modifique el rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.
b) Se hace el mismo pedido, pero ahora se quiere un modelo más pequeño, donde lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

Comentarios sobre el problema

Este problema está planteado en un contexto geométrico que involucra la idea de semejanza. Para resolver el ítem **a)**, algunos estudiantes podrían agrandar la pieza 1 de la siguiente manera:



Si a 4 cm le sumamos 3 cm para pasar a 7 cm, a 5 cm también le sumamos 3 cm pasando a 8 cm, y el tercer lado queda determinado.

Con esta estrategia, los alumnos pueden armar otro triángulo rectángulo. Este mismo procedimiento funciona, aparentemente, con los otros triángulos rectángulos y con el rectángulo, sin generar muchos cuestionamientos en los alumnos. Sin embargo, las piezas 5 ó 6 pueden generar alguna controversia en cuanto a decidir a qué lado agregar 3 cm, dado que en algún caso se puede perder la forma de triángulo isósceles.

Si aún así no se hubieran producido muchas dudas en cuanto a que la estrategia empleada es incorrecta, el conflicto surgirá cuando intenten reconstruir toda la figura y las piezas no encajen. La riqueza de este problema es que la validez, o no, de la estrategia empleada no viene dada por la autoridad del docente sino por la situación misma, que evidencia que no funciona. Esta posibilidad de control, por parte de los alumnos, no es posible en el problema de las pinturas.

La ineficacia del procedimiento aditivo debería permitir identificar como estrategia válida la búsqueda del valor correspondiente a la unidad. De este modo se podría recurrir a las propiedades de las relaciones de proporcionalidad, de manera similar a lo realizado en el problema anterior.

La organización de los datos en una tabla permitirá hacer un análisis que le dé sentido a la operatoria con fracciones:

x 5

: 2 : 2 x 2

Medidas de segmentos del original (en cm)	1	2	4	5	10
Medidas de su modelo ampliado (en cm)	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{2}$	7	$\frac{35}{4}$	$\frac{70}{4}$

x 2 x 2

x 5

x 10

Es decir, en este problema se tratan de encontrar las imágenes de números naturales, que resultan ser fracciones debido a los números que se eligen: $\frac{7}{4}$ es el coeficiente de proporcionalidad; los otros valores se encuentran multiplicando esta fracción por enteros.

La confrontación de resoluciones apoyadas en las propiedades de la proporcionalidad directa y aquéllas que apelen a la constante de proporcionalidad permitirán un trabajo sobre la **multiplicación o la división de fracciones por números naturales**.

Se puede prolongar este trabajo buscando la imagen de una fracción, a partir de conocer el procedimiento para encontrar la imagen de un entero.

El ítem **b)** apunta a la búsqueda de la **constante de proporcionalidad** que permita la transformación de una figura en otra semejante, mediante la multiplicación de un número natural por una fracción $\left(5 \cdot \frac{3}{5} = 3\right)$.

Se podrá retomar lo trabajado con la tabla, identificando nuevamente que la constante de proporcionalidad es el valor que se corresponde con el 1 ($\frac{3}{5}$ significa la medida del segmento reducido que corresponde a un original de 1 cm).

Considerando en conjunto los ítemes **a)** y **b)** es posible analizar con los alumnos que: **"si la constante es mayor que 1, se trata de una ampliación y, en caso contrario, de una reducción"**.

Los problemas que se presentan a continuación están planteados en contextos matemáticos.

Problema 8

a) Completen la siguiente tabla con los procedimientos que prefieran, sabiendo que expresa una proporción directa.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{9}$	......	......
y	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	......	......	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$

b) Escriban una fórmula que permita determinar el valor de una variable en función de la otra.

Comentarios sobre el problema

El ítem **a)** de este problema tiene como objetivo volver sobre los conocimientos trabajados en los problemas anteriores.

En tanto que para la resolución del ítem **b)** –escribir las fórmulas–, el docente podrá generar una discusión acerca de las constantes de proporcionalidad, proponiendo la elaboración de una fórmula que considere *x* como variable independiente y otra donde la variable independiente sea *y*.

Esto permite abordar la idea de inverso multiplicativo. Por ejemplo, si para pasar de $\frac{2}{3}$ a $\frac{8}{9}$ hay que multiplicar por $\frac{4}{3}$, para pasar de $\frac{8}{9}$ a $\frac{2}{3}$ habrá que dividir por $\frac{4}{3}$, que según la fórmula equivale a multiplicar por $\frac{3}{4}$. Este análisis podría colaborar en la producción de un recurso de cálculo para dividir fracciones –en caso de que los alumnos no lo conozcan–, o hacer que den sentido a la regla que conocen.

El siguiente problema está planteado en el contexto de porcentajes (seguramente ya abordado en la escuela primaria), a partir del estudio de las relaciones entre este concepto y los de fracción y razón.

Se incorpora el recurso algebraico en la formulación y la validación de algunas generalizaciones que se estudian. Este recurso algebraico será objeto de trabajo en el **capítulo 5**.

PROBLEMA 9

a) Decir si es V o F, para cualquier número b racional.

- 20% de $b = \frac{1}{5}$ de b
- $\frac{1}{5} \,.\, b = 0{,}5 \,.\, b$
- $\frac{b}{5} = \frac{20}{100} b = 0{,}2\, b$
- 125% $b = \frac{5}{4}\, b$

b) Decir cuál es la respuesta correcta:
Si de un valor b se descuenta el 30%, se obtiene: ¿ $\frac{2}{3}\, b$ ó $\frac{7}{10}\, b$?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Para resolver el ítem **a)** es posible que algunos alumnos se apoyen en algún tipo de representación gráfica que les permita establecer relaciones entre $\frac{1}{5}$ y el 20%. Por ejemplo, el siguiente esquema:

20%	20%	20%	20%	20%

100%

Es decir, suponer que el todo es el 100%, partirlo en 5 partes iguales y concluir que cada una de las partes es $\frac{1}{5}$ del total, es decir, el 20%.

Otra posibilidad es que los alumnos asignen diferentes valores a b corroborando que 20% de b es igual a $\frac{1}{5}$ de b. Para muchos alumnos, esta verificación con algunos ejemplos les resulta suficiente para afirmar que vale para cualquier número racional. El docente podrá intervenir preguntando, por ejemplo, *¿cómo pueden estar seguros de que dará lo mismo para un número como éste, $\frac{345}{17}$, sin hacer la cuenta?*

Esta entrada en la búsqueda de argumentos generales para dar cuenta de la validez de una propiedad, que se enuncia para todo número, es de largo aliento. Se necesitarán muchas instancias de trabajo en el aula para que los alumnos vayan ubicando la verificación con ejemplos particulares en una fase exploratoria del problema. En el **capítulo 5** se ofrecen variadas oportunidades para avanzar en esta dirección.

El recurso de los ejemplos resulta suficiente para invalidar que $\frac{1}{5} \cdot b = 0{,}5 \cdot b$

Para analizar si $\frac{b}{5} = \frac{20}{100}\ b = 0{,}2\ b$, la noción de equivalencia es un recurso posible. Es decir, identificar $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}2$ permitiría resolver esta cuestión.

Otro camino posible es escribir el porcentaje como fracción de denominador 100 y apelar a la noción de fracciones equivalentes ya trabajadas con anterioridad.

Es decir, tanto el procedimiento gráfico como considerar el porcentaje como fracción permitirían dar respuesta a los tres primeros puntos de esta parte del problema.

De manera análoga se podrá tratar el caso del 125%.

Para resolver el ítem **b)**, es probable que los alumnos vuelvan una vez más a la verificación para ciertos valores de *b*. En este caso, como una de las fórmulas debe ser cierta, este recurso es suficiente para responder. La intervención docente podría promover el recurso, utilizado anteriormente, de tratar el porcentaje como fracción.

Capítulo 2

Fracciones como medida y orden en Q^+

En este capítulo se presentan distintos problemas donde se busca determinar la medida de un segmento considerando otro como unidad. En todas las situaciones los dos segmentos involucrados son conmensurables. Es decir, son situaciones donde la medida obtenida resulta ser un número racional.

La idea que se pone en juego en estos problemas es que "si m veces un segmento *a* es igual a *n* veces un segmento *b*, *a* tiene una medida racional si se considera *b* como unidad, y viceversa".

Los primeros cinco problemas permiten abordar esta relación en contextos extramatemáticos. En el problema 6, se aborda directamente en el contexto numérico favoreciendo la explicitación de esta propiedad.

Para estos problemas de medida es esperable que en el aula coexistan respuestas exactas expresadas por fracciones y respuestas aproximadas expresadas por expresiones decimales –así como se anticipó, en el **capítulo 1**, al analizar los "problemas de pintura"–. Es un asunto que probablemente deberá volver a discutirse en clase: las diferencias y preferencias entre racionales y decimales. Esta discusión debería incluir el hecho de que, en el plano de la realidad, efectivamente alcanza con las aproximaciones decimales, mientras que en el modelo matemático, la respuesta precisa será un número racional.

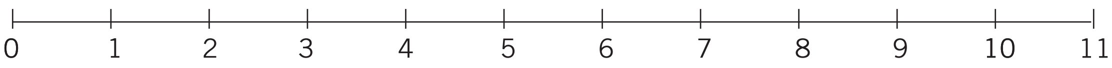
A través del trabajo con los problemas de los diferentes capítulos, se espera que los alumnos puedan ir apropiándose de la conveniencia de recurrir a la expresión fraccionaria, tanto para la realización de ciertos cálculos como para comparar algunos números racionales.

A continuación, se presentan tres problemas en el contexto de robots que caminan por una cinta graduada[5].

5 Adaptación de un problema presentado en el documento: *Matemática. Fracciones y números decimales*, 7º grado, *Apuntes para la enseñanza, Op. cit.*

Problema 1

Un robot A se desplaza dando pasos sobre una recta como la siguiente:



Los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3.

a) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

b) Identificá 5 puntos de la recta donde pararía el robot, que no sean los que aparecen marcados con los números naturales, y asignale un número a cada uno de esos 5 puntos.

Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

c) Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

d) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

e) ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?

Comentarios sobre el problema

Se supone que los alumnos ya han tenido en la escolaridad primaria alguna experiencia con la ubicación de números fraccionarios en la recta, aunque podemos esperar mucha diversidad sobre el grado de comprensión de esta conceptualización más geométrica (asociada a la magnitud longitud de segmentos) de lo numérico.

Si bien se están midiendo segmentos (los pasos de los robots), tomando como unidad cualquier segmento que tenga como extremos dos de los puntos marcados con números naturales consecutivos, esta cuestión puede permanecer implícita para responder a las distintas preguntas de este **problema 1**.

En la hoja que se les presenta a los estudiantes, la unidad marcada es de 1,3 cm. Se ha elegido este número para que una regla graduada, apoyada sobre el papel, no pueda servir como instrumento para responder las preguntas planteadas. Aunque es probable que los alumnos recurran a este instrumento para marcar el punto medio entre dos naturales consecutivos.

Podría ser que algunos alumnos resuelvan los ítemes **a)**, **b)** o **c)** con números decimales, que en este caso dan la respuesta exacta. La idea es discutir en la clase acerca de otras representaciones de estos números. En particular, la pregunta **a)** podría dar lugar a discutir la equivalencia de las escrituras (algunas de ellas aportadas por el docente): 7,5; $7\frac{1}{2}$; $\frac{15}{2}$; $6 + \frac{3}{2}$; 6 + 1,5; $\frac{75}{10}$; $7 + \frac{1}{2}$. También sería interesante presentar y analizar otras escrituras incorrectas, como $\frac{7}{5}$, confundida con 7,5, o bien $\frac{9}{2}$, como resultado erróneo de $6 + \frac{3}{2}$.

Las experiencias realizadas en las aulas muestran que muchos estudiantes necesitan discutir sobre estos asuntos para aclarar aspectos de la escritura y de los números que todavía no han comprendido. Es una buena oportunidad para hacerlo.

Para responder el ítem **d)**, hay que considerar a los robots caminando indefinidamente y extender lo observado, necesariamente finito, realizando una anticipación de lo que va a pasar. En definitiva, hay que poder llegar a formular (y validar) que B pisa todos los pasos de A, y entonces los puntos de encuentro serían las pisadas de A.

En cuanto al ítem **e)**, el enunciado puede ser interpretado de diferentes modos por los alumnos. Podrían identificar "relaciones" como: "es más lento el robot B que el robot A", "los pasos no tienen la misma medida", "los pasos de los robots son números decimales". Como se decía en la introducción, puede ser necesaria una intervención del docente que oriente para encontrar una relación numérica entre los pasos de los dos robots.

Atendida esta cuestión, la comparación entre los pasos necesita de la consideración inicial de los dos robots parados en el mismo punto (el 0 ó el 3 ó el 6). Trabajando sobre el dibujo, los alumnos pueden constatar que tres pasos de uno corresponden exactamente a un paso del otro.

Para trabajar en el plano numérico, es necesario identificar con un número la medida de un solo paso de cada robot. Para esto, puede ser necesario preguntar por el número que asignarían a la primera pisada de cada robot, si ambos parten del 0. Las dos medidas obtenidas, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, permiten identificar que un paso equivale a tres del otro robot, como se puede ver en la escritura fraccionaria.

A continuación, en el **problema 2**, se presentan otros robots cuyos pasos tienen como medida un número racional. En este caso, las respuestas con números decimales serán aproximadas y los números periódicos aparecerán en escena.

La comparación que se solicita entre los pasos de los robots permitirá la producción de algunas estrategias para estudiar el orden en Q^+. El trabajo en la recta numérica y la puesta en juego de relaciones de proporcionalidad servirán para poder justificar las comparaciones.

No se apunta directamente a recordar y aplicar una regla de comparación de fracciones (los productos cruzados), que quizás algunos alumnos conozcan pero que, en general, suelen confundir con la regla para multiplicar y/o la regla para dividir dos fracciones. Como ya dijimos, la regla debe ser un punto de llegada, a partir de un trabajo adaptado a los números particulares que hay que comparar. En el proceso, otros criterios para comparar serán construidos en clase.

Problema 2

Se conocen ahora los datos de cinco robots más, C, D, E, F y G, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, de la siguiente manera:

C llega al	5 en	3 pasos
D llega al	5 en	9 pasos
E llega al	14 en	9 pasos
F llega al	10 en	6 pasos
G llega al	23 en	11 pasos

a) Ordená por tamaño, de menor a mayor, los pasos de los cinco robots. Explicá, con tus palabras, cómo hiciste para compararlos.

b) ¿Cuánto miden los pasos de cada robot? Ordená de menor a mayor los números que obtuviste.

Comentarios sobre el problema

En el enunciado de este problema se ha separado deliberadamente el ítem **a)** del **b)** para habilitar la posibilidad de realizar la comparación entre los pasos sin llegar a calcular la longitud de cada paso. Se analizará, a continuación, esta manera de encarar la comparación y, posteriormente, el recurso del cálculo –exacto o aproximado– de la longitud.

Por ejemplo, si se consideran los robots C y D, se puede argumentar que D da pasos más cortos, porque necesita más pasos para llegar al mismo lugar.
Se tiene hasta ahora: pasos D < pasos C

El robot E es fácil de comparar con el D: el E da pasos más grandes, pues llega más lejos con los mismos pasos. Falta compararlo con el C.

Para ello, se puede apelar a la proporcionalidad entre pasos y recorrido, y determinar que C llegaría al 15 en 9 pasos, por tanto, su paso es más grande que el de E.

Se tiene hasta ahora: pasos D < pasos E < pasos C.

Para ubicar los pasos de F, se puede volver a recurrir a la proporcionalidad y concluir que sus pasos son iguales a los de C.

Por último, mirando los valores del robot G se puede estimar que sus pasos son más grandes que todos: “en un paso salta más de dos rayitas, mientras que el C, el mayor, no llega a dos”.

Finalmente, se obtiene el siguiente orden:
pasos D < pasos E < pasos C = pasos F < pasos G.

Algunos estudiantes suelen confundir el tamaño de un paso con el punto de llegada que se da como información; explican que el paso mayor es el de G (lo cual es cierto en este caso), y que el paso de F es mayor que el de C, pues llega más lejos. En estos casos, se puede proponer identificar el punto donde termina el primer paso de cada robot, o pintar el recorrido de un paso cualquiera para los robots involucrados.

Otra manera diferente de efectuar la comparación de los pasos es mediante el cálculo de la longitud de cada paso, es decir, responder a la pregunta **b)** para dar repuesta a **a)**.

Es usual que los alumnos realicen las respectivas cuentas de dividir con la calculadora y consideren una o dos cifras después de la coma. La obtención de cada longitud sería aproximada pero, en este caso, permite ordenarlas correctamente. De todas maneras, sería pertinente que el docente gestione una discusión en torno de esta aproximación. Por ejemplo, puede proponer a los alumnos comparar los pasos del robot E con los de un nuevo robot H del cual se sabe que llega al 31 en 20 pasos. Para el robot E, el resultado que se obtiene es 1,555... mientras que para el robot H, 1,55. Si se hubieran considerado solamente dos cifras después de la coma, no se habría podido establecer la diferencia entre los pasos. Es decir, la intención de incorporar este nuevo robot es reconocer los límites del uso de las aproximaciones.

Otra posible intervención, ante la respuesta 1,55 para el robot E, es argumentar que si $\frac{14}{9}$ fuera igual a 1,55, debería verificarse que 1,55 x 9 = 14, cosa que no ocurre. Es decir, al multiplicar la cantidad de pasos por la medida del paso no se llega al número requerido. Un problema a tener en cuenta es que trabajando con la aproximación completa que da la calculadora (cualquier tipo de calculadora), si se efectúa 14 : 9 y luego, al resultado que aparece en el visor se lo multiplica por 9, se observa como resultado... ¡14! ¡La calculadora volvió a aproximar! Este tema requiere ser discutido con los alumnos.

El cálculo de la longitud de cada paso debería conducir a una pequeña discusión en clase acerca del significado de medir: para hacerlo hay que considerar una unidad de medida. Para este **problema 2**, es necesario acordar explícitamente que consideren al segmento entre 0 y 1 como unidad de medida. El problema de medir con diferentes unidades (no necesariamente las unidades convencionales) será retomado en el **problema 4**.

Relacionando las comparaciones hechas para los pasos con las medidas de los mismos, se espera llegar a formular diferentes criterios y estrategias para comparar las fracciones $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{10}{6}$, $\frac{23}{11}$ y $\frac{31}{20}$.

Estos criterios ya se han mencionado en el **capítulo 1**:

"Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador."
"Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador."

En este caso, se obtendría, por ejemplo, que:

- $\frac{5}{9} < \frac{14}{9}$ pues 5 < 14 (el sentido numérico de esta afirmación –hay más novenos en la fracción de la derecha– puede reforzarse, pensando en los robots, argumentando que se llega más lejos con la misma cantidad de pasos).

- $\frac{5}{3} > \frac{5}{9}$, pues como 3 < 9, un tercio es más grande que un noveno. Argumentando sobre los robots, con menos pasos, el robot de la izquierda llega al mismo lugar; luego, sus pasos son más grandes.

Para otras comparaciones es conveniente transformar una (o ambas fracciones) en otras equivalentes para poder aplicar alguno de los dos criterios anteriores.

Acerca de la noción de fracciones equivalentes

En los primeros "problemas de pintura" del **capítulo 1**, y en los dos que se analizaron recién, se pone en juego la noción de fracciones equivalentes o, lo que es lo mismo, de distintas escrituras fraccionarias de un número racional. Es un tema que se aborda en la escuela primaria. Sin embargo, es usual que los alumnos, intentando recordar una técnica, pierdan de vista el sentido de la noción.

A partir del trabajo realizado en la resolución de los problemas, es posible encarar una reflexión específica sobre esta noción.

Una primera idea a consolidar es que:
"si el numerador y el denominador de una fracción resultan de multiplicar numerador y denominador de otra por un **mismo** número natural, ambas fracciones son equivalentes, representan el mismo número racional".

Esta propiedad explica por qué se pueden simplificar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo divisor, sin modificar el valor de la fracción. Es probable que los alumnos conozcan esta regla, pero no es seguro que sepan por qué funciona.

Ahora bien, es necesario avanzar con ejemplos que muestren que esta condición que se enunció es suficiente pero no necesaria para determinar la equivalencia entre dos fracciones. Es decir, los alumnos deberían estudiar, por ejemplo, que $\frac{8}{12}$ y $\frac{10}{15}$ son equivalentes y no cumplen la condición anterior.

En consecuencia, sería necesario elaborar, entre todos, un nuevo enunciado que permita abarcar todas las situaciones posibles. Por ejemplo, un enunciado “completo” de la condición de equivalencia entre dos fracciones podría pasar por el hecho de que ambas, simplificadas, coincidan.

A la luz del conocimiento que se va produciendo en la clase, también sería pertinente discutir el criterio de “productos cruzados iguales”, regla que es posible que muchos alumnos conozcan, y que ahora se estaría en condiciones de fundamentar.

A continuación, se presenta un tercer problema de robots, para consolidar lo trabajado.

PROBLEMA 3

Tenemos cinco robots llamados H, I, J, K, L, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, con pasos de la misma longitud, de la siguiente manera:

H llega al	8 en	3 pasos
I llega al	12 en	15 pasos
J llega al	4 en	2 pasos
K llega al	8 en	10 pasos
L llega al	18 en	9 pasos

Ordená de menor a mayor los robots, según la longitud de sus pasos. Explicá, con tus palabras, cómo comparaste cada número con los otros.

El problema siguiente tiene por objetivo discutir explícitamente la idea de que se puede medir tomando unidades de medida no convencionales.

PROBLEMA 4

Cuatro chicos midieron el largo del pizarrón de su aula y llegaron a las siguientes conclusiones:

Adriana midió con un cordón, y le dio 6 cordones.
Sergio midió con su carpeta, y le dio 10 “largos de carpeta”.
Javier midió con la regla, y le dio 250 cm.
Federico midió con su pulgar, y le dio 50 pulgares.

Suponiendo que los cuatro chicos midieron bien el pizarrón y que, entonces, todas sus mediciones son iguales, respondé las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la unidad de longitud que tomó cada chico?

b) ¿Cuánto mide el largo de la carpeta de Sergio, si la unidad es el pulgar de Federico?

c) ¿Cuánto mide el pulgar de Federico, si la unidad es el cordón de Adriana?

d) ¿Cuánto mide el cordón de Adriana, si la unidad es el largo de la carpeta de Sergio?

Comentarios sobre el problema

En este problema se retoma el sentido de medir no como una acción, sino como el resultado de asociar un número a una magnitud, una vez que se consideró otra como unidad. Se podría ampliar el trabajo sobre esta temática con una invitación a los alumnos de propuestas de unidades de medida no convencionales para medir otro tipo de magnitudes, áreas o volúmenes.

La experiencia en las aulas muestra que algunos alumnos confunden la unidad de medida con el objeto utilizado para medir, y desde esta confusión responden que la unidad de medida que usó Javier es la regla.

Para las unidades que se presentan en este problema, los distintos resultados corresponden a números racionales.

Es probable que los alumnos recurran a "la regla de tres", como procedimiento válido para llegar a la repuesta. En muchos casos, es un recurso que "aplican" mecánicamente, sin un control del sentido que les permita discernir cuál es la operación correcta en cada caso. La experiencia muestra que muchos alumnos apelan al sentido de los elementos que se están comparando para plantear la fracción correcta, y no su inversa: por ejemplo, en el punto **c)** dijeron: "el pulgar es una parte del cordón, ya que un pulgar no puede medir todo un cordón; por tanto, 1 pulgar = $\frac{6}{50}$ de cordón".

Otra estrategia posible, y encontrada en el aula, es pasar todo a cm y buscar luego las medidas requeridas.

Se podría continuar lo trabajado en este problema con otra actividad que ponga en juego el hecho de componer unidades. Por ejemplo, una vez resuelto el ítem **b)** y el **c)**, preguntar por la medida del largo de la carpeta de Sergio, si se considera como unidad el cordón de Adriana. Esta situación permitiría poner en escena el tema del producto de dos números fraccionarios, tema que se profundiza en el **capítulo 4**.

Como caso particular, podría preguntarse sobre la relación existente entre medir un objeto, por ejemplo la carpeta, tomando como unidad los cordones, y hacerlo al revés, la medida de un cordón, considerando como unidad la carpeta: se estaría trabajando sobre la noción de inverso de un número racional.

A continuación, presentamos un problema que tiene por objetivo la identificación de la siguiente propiedad:

Dados dos segmentos A y B, que verifican que k A = p B, para ciertos números naturales k y p; entonces existe un segmento C que es una medida común a A y B (es decir, existe un segmento C que entra una cantidad de veces exacta en A y otra cantidad de veces exacta en B).

Es una propiedad que valdría también para otras magnitudes que no sean la longitud, siempre que las dos magnitudes que se estudien cumplan la hipótesis que se pide para los segmentos: que un múltiplo de la primera se iguale a otro múltiplo de la segunda. La propiedad que se obtiene, tener una tercera magnitud que mide a las dos, se enuncia diciendo que son conmensurables. No se trata de que los alumnos retengan este nombre ni que la propiedad sea enunciada para luego "aplicarla" en problemas, sino que se explore a partir de la resolución de una situación.

El **problema 5** se presenta como una continuación del problema de medidas de un pizarrón y apunta, entonces, a la identificación de la propiedad que se acaba de enunciar.

PROBLEMA 5

Julia tiene una tablita de madera y dice que cabe una cantidad justa de veces en el cordón de Adriana, y otra cantidad justa de veces en el largo de la carpeta de Sergio. ¿Cuánto puede medir la tablita de madera de Julia?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Del problema anterior, se debería haber llegado a la siguiente relación:

Como 6 cordones son iguales a 10 carpetas, longitud de un cordón = $\frac{10}{6}$ largo de carpeta.
Si se parte, entonces, el largo de carpeta en 6, se puede obtener una medida como la buscada. Una repuesta posible es, entonces, $\frac{1}{6}$ largo de carpeta. Pero hay más: $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{6}$ largo de carpeta, $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ largo de carpeta ó $\frac{1}{4}$ de esta longitud, también sirven como respuesta al problema.

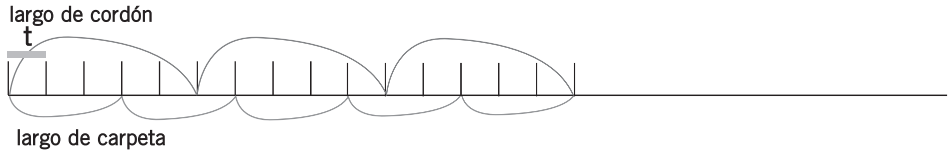
En un aula donde se puso en juego el **problema 5**, uno de los alumnos del curso dibujó en su carpeta lo que él consideraba la mitad del pizarrón y lo dividió en 15 partes iguales, ya que si:

$$1 \text{ pizarrón} \longrightarrow \begin{array}{l}6 \text{ cordones}\\ 10 \text{ largos de carpeta}\end{array}$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{2} \text{ pizarrón} \longrightarrow \begin{array}{l}3 \text{ cordones}\\ 5 \text{ largos de carpeta}\end{array}$$

Usó el 15 como una cantidad posible de partir en 3 y 5, y agregó este dibujo:

G.C.B.A.



Entonces, este alumno llegó a la conclusión de que $\begin{cases} 3 \,.\, t = 1 \text{ largo de cordón} \\ 5 \,.\, t = 1 \text{ largo de carpeta} \end{cases}$

La tablita es $\frac{1}{3}$ del largo del cordón y $\frac{1}{5}$ del largo de carpeta.

A la pregunta de "si puedo tomar la mitad de la tablita, ¿puedo medir a los dos?", una alumna contestó que sí, pues t' = $\frac{1}{2}$ t = $\frac{1}{6}$ largo de cordón.

El problema de la tablita y las medidas del pizarrón puede ser un punto de partida para la construcción de conocimientos más descontextualizados.

Un primer paso podría ser, siguiendo en el marco de los segmentos y de las longitudes, estudiar la siguiente situación:

- Si consideramos dos segmentos a y b que, respecto de cierta unidad, miden $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, ¿cuál podría ser una medida común a estos segmentos? Estudiar el mismo problema, pero con medidas $\frac{1}{2}$ y $\frac{5}{6}$, ¿cuál puede ser una medida común?, ¿y si las medidas son $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{5}$?

Un segundo paso sería dar lugar a una discusión sobre las cuestiones numéricas subyacentes, que podrían ser exploradas por los alumnos a partir de algunos ejemplos:

- Dados dos números racionales, $\frac{13}{6}$ y $\frac{25}{8}$, ¿se puede encontrar un tercer número racional X, de manera que $\frac{13}{6}$ sea un múltiplo (natural) de X y $\frac{25}{8}$, también?

- Si ahora consideramos dos números racionales cualesquiera, ¿siempre se puede hallar un número racional que esté contenido una cantidad entera de veces en los números anteriores? Si creés que se puede, proponé una forma de hacerlo para cualquier par de números y si no, da dos números para los cuales no exista una medida común.

Para terminar, es importante señalar que queda pendiente abordar la noción de inconmensurabilidad entre segmentos, con problemas como:

1. Hallar la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado.
2. Encontrar, si es posible, una medida común entre el lado y la diagonal de un cuadrado.

Este tipo de situaciones permite reflexionar sobre la necesidad de nuevos números para medir algunas longitudes. Se constituye, entonces, en una vía de entrada a la presentación de los números irracionales y la conformación del conjunto de números reales. Es una cuestión para abordar luego de haber trabajado en la consolidación del tratamiento de los números racionales. Sin embargo, es un asunto que podría surgir como pregunta al tratar los problemas que presentamos en este capítulo. En ese sentido, es importante que el docente lo tenga presente y, si lo cree conveniente, anuncie a sus alumnos que en un futuro esta problemática será objeto de estudio.

Para “atrapar” el problema de la inconmensurabilidad y la irracionalidad, será necesario alejarnos de contextos reales o situaciones de medida efectiva. Abordar esta temática aporta a la construcción de la noción de número racional –proceso que comenzó en la escuela primaria, pero que se profundiza en primero y segundo año– ya que permite identificar los límites de este conjunto de números para responder a problemas que plantea la matemática.

Capítulo 3

Orden y densidad en Q

En este capítulo se presentan diferentes problemas para estudiar la relación de orden –ya abordada en los primeros dos capítulos– y la noción de densidad.

En los **capítulos 1** y **2** los números racionales aparecen como herramientas para resolver problemas (proporcionalidad y medida), y se espera que el trabajo propuesto permita construir un sentido de la noción de número racional. En este capítulo los problemas están planteados en contextos matemáticos, y los números racionales son objetos de los cuales se estudian sus propiedades. Se recomienda, entonces, comenzar por los problemas de los dos primeros capítulos antes de abordar los que se presentan aquí.

La recta numérica, que ya estuvo presente en los problemas de robots del **capítulo 2**, ocupa un lugar importante en este capítulo, como soporte para pensar asuntos de orden y densidad.

Los problemas 1 al 8 ponen en juego la problemática del orden y la densidad en Q^+, tanto con fracciones como con las expresiones decimales de los números.

Los problemas 9, 10 y 11 presentan un trabajo explícito sobre la recta numérica con la incorporación de los números racionales negativos.

En muchos de los problemas de este capítulo se pide hallar un número entre otros dos, situación importante para entender el concepto de densidad. En los análisis que se presentan se consideraron los intervalos sin los bordes, y será decisión del docente adoptar, para cada problema, intervalos que incluyan los bordes o no.

El concepto de densidad es complejo y requerirá de un trabajo de exploración variado por parte de los estudiantes, y de un sostén del docente de las necesarias discusiones y reflexiones en clase que el tema requiere.

Problema 1

¿Cuántas fracciones hay entre 17 y 18? ¿Cuántas fracciones con denominador 5 hay entre 17 y 18? ¿Y con denominador 9? ¿Y con denominador 21?

Comentarios sobre el problema

El objetivo de la primera pregunta es que los alumnos comiencen a pensar que entre dos enteros consecutivos hay muchas fracciones. Encontrar fracciones en un intervalo que no sea el (0,1) puede resultar complejo para muchos alumnos, pero es una complejidad que necesita ser abordada.

Como no se sugiere denominador alguno, es probable que los alumnos tomen el punto medio entre 17 y 18, y escriban 17,5 ó $17\frac{1}{2}$ ó $17+\frac{1}{2}$, situación que podrá ser aprovechada para discutir la equivalencia entre las distintas formas de escritura. Preguntar cuántos medios hay entre 17 y 18 puede llevar a los alumnos a justificar la escritura $17\frac{1}{2}$; reflexionar sobre cuántos medios hay desde 0 hasta 17 puede ser una herramienta para validar la escritura $\frac{35}{2}$, y justificar los algoritmos de la suma de fracciones y de transformación de escritura mixta en fracción, que probablemente los alumnos hayan aprendido en la escuela primaria.

La representación de una porción adecuada de la recta y la ubicación allí de datos y soluciones puede ser un buen complemento del trabajo numérico desarrollado.

Se intenta estudiar en este problema la cantidad de fracciones en relación con el denominador en intervalos de longitud 1. Para responder a las preguntas que siguen, se espera que los alumnos comiencen a probar y anticipen que se pueden escribir 4 fracciones con denominador 5 y 8 con denominador 9, etcétera.

El docente podrá preguntar, *¿cuántas se podrán escribir con denominador 45? ¿Y con denominador 234? ¿Y con denominador* n*?* A esta altura del trabajo, los alumnos están en condiciones de conjeturar que existe cierta relación entre el número del denominador y la cantidad de fracciones que se pueden escribir: "el número de fracciones con denominador *n*, comprendidas entre dos enteros consecutivos, es *n-1*". La validación de esta conjetura podrá hacerse apoyándose en la recta numérica, y/o argumentando a partir de la división del intervalo en medios, tercios, quintos, novenos, o tantas partes como se quiera. Producir esta conjetura es un primer grado de generalidad, y da pie para que los alumnos elaboren argumentos (que quedarán en el nivel oral) que prueben su validez para intervalos de longitud uno.

Se puede retomar la discusión dentro de este mismo problema cuestionando la validez de la conjetura en otro intervalo de longitud uno, pero entre dos fracciones: por ejemplo, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{3}$. Los alumnos podrán trabajar sobre la recta numérica y probar que la conjetura no vale para intervalos de bordes no enteros.

Se puede proponer otro problema con un grado mayor de dificultad.

Encontrar un intervalo de longitud 1 de límites fraccionarios que incluya las fracciones $\frac{3}{4}$ *y* $\frac{4}{4}$.

Posibles soluciones son:

El intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{5}{4}]$; $[\frac{2}{4}, \frac{6}{4}]$,

$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4}$; $\frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4} < \frac{6}{4}$

La representación en la recta numérica de las diferentes soluciones o la búsqueda de las mismas en el dibujo de la recta son estrategias que deberían tener un lugar en la clase.

Puede ser que en todo este problema algunos alumnos trabajen casi exclusivamente con números decimales. Esto podrá ser aprovechado por el docente para confrontar esas escrituras con las fraccionarias, y promover la aparición de escrituras aditivas equivalentes fraccionarias. Por ejemplo: 17,2 podría escribirse como $17 + 0{,}2 = 17 + \frac{2}{10} = 17 + \frac{1}{5} = \frac{86}{5}$.

PROBLEMA 2

¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$?
¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ que tengan denominador 9?
¿Y que tengan denominador 18?
¿Y que tengan denominador 10?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Este problema vuelve a presentar un intervalo entre dos fracciones, pero ahora la longitud no es uno y las fracciones son de distinto denominador. Como 9 es múltiplo de 3, es posible que los alumnos busquen la fracción equivalente a $\frac{1}{3}$ de denominador 9, y digan que no existe ninguna fracción entre $\frac{3}{9}$ con $\frac{4}{9}$, "importando" propiedades de los números naturales. Este argumento es correcto para contestar la segunda pregunta.

Incluir la pregunta por fracciones de denominador 18 tiene como finalidad provocar en los alumnos la reflexión sobre el efecto de duplicar el denominador cuando se consideran fracciones de denominadores iguales y numeradores consecutivos: se encuentra una fracción justo en el punto medio del intervalo. Este hecho debería cuestionar las posibles respuestas erróneas en la primera pregunta.

Este problema se puede gestionar proponiendo, en un primer momento, sólo la primera pregunta y continuar con las siguientes, según sea lo que van produciendo los alumnos. La actividad y las discusiones que se generan se dan en diferentes momentos de la clase.

Otra forma de gestionar este problema podrá ser:

Encontrar la fracción que corresponde al punto medio del intervalo [$\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$]; una estrategia es hallar fracciones equivalentes a los extremos de denominador 18. Encontrar el punto medio se puede relacionar con la división de fracciones, ya que la medida del intervalo es $\frac{1}{9}$ y la mitad, $\frac{1}{18}$ que es $\frac{1}{9}$: 2 ó $\frac{1}{9}$ x $\frac{1}{2}$, situación que fue trabajada en el **capítulo 1**.

Además, se puede poner en discusión la conveniencia –en este caso– de la expresión fraccionaria sobre la decimal: utilizar la expresión decimal periódica es menos eficiente ya que, si bien con la calculadora se puede encontrar el punto medio entre 0,33333... y 0,4444..., no es posible definirlo con precisión.

Otra estrategia posible es dividir el segmento de recta [0,1] en 3 partes iguales para marcar $\frac{1}{3}$, y volver a dividir los intervalos en 3 partes para encontrar los novenos. Si esta técnica no está disponible, será parte de la tarea aprenderla: los alumnos deberían llegar a saber que $\frac{4}{9}$ es $\frac{1}{3}$ más la tercera parte de lo que hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$.

Preguntar la cantidad de fracciones con denominador 10, entre $\frac{3}{9}$ y $\frac{4}{9}$, podría generar el despliegue de distintas estrategias de resolución:

- Los alumnos hacen la división y llegan a las expresiones 0,33333... y 0,4444... que escribirán truncadas. Un conocimiento de la escritura decimal permitiría responder que 0,4 es el único número racional, entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$, que se expresa como fracción con denominador 10.

Otra estrategia será trabajar con fracciones comparando por pares, deducir que $\frac{4}{9}$ es mayor que $\frac{4}{10}$ apelando a criterios elaborados en los capítulos anteriores, y después comparar $\frac{4}{10}$ con $\frac{3}{9}$ usando fracciones equivalentes. En todos los casos deberían encontrar que la única solución posible es $\frac{4}{10}$.

La representación en la recta es un buen complemento del trabajo en el plano numérico. Visualizar los tercios, los novenos y algunas fracciones de denominador 18 en la recta aporta a la comprensión del papel diferenciado de cada uno de los dos números que constituyen la fracción (por ejemplo: aumentar el numerador me permite avanzar a los saltos para la derecha; cambiar el denominador modifica la longitud de los saltos). Estas reflexiones contribuyen a la comprensión de la naturaleza del conjunto de números racionales, eje central de los tres últimos capítulos.

Problema 3

¿Cuántas fracciones, cuyo denominador es una potencia de 10, hay entre $\frac{72}{100}$ y $\frac{73}{100}$? ¿Y con denominador 10? ¿Y con denominador 100?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

En este problema la pregunta por los denominadores que son potencia de 10 pone en primer plano la relación entre la escritura fraccionaria y la decimal. Habrá que construir ahora un nuevo conocimiento: en cualquier intervalo de números fraccionarios se pueden encontrar infinitos números decimales. Y esto se logra aumentando la cantidad de cifras, que es equivalente a aumentar la potencia de 10 en el denominador.

Para responder a las otras preguntas, conviene visualizar en la recta que si se marcan los décimos, los dos números dados caen dentro de un intervalo, y si se marcan los centésimos, caen en los bordes.

Si se intenta resolver este problema apoyándose en la representación gráfica de la recta, habrá que elegir con cuidado qué sector de la misma es conveniente considerar: se recomienda dibujar la sección correspondiente a $\frac{7}{10}$, $\frac{8}{10}$.

PROBLEMA 4

a) Encontrar dos fracciones que estén entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$.

b) Encontrar una fracción con denominador 20.

c) ¿Hay más de una fracción? ¿Cuántas?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Es probable que los alumnos lleguen a la solución $\frac{1}{6}$; ésta podría surgir en forma intuitiva, pues 6 está entre 5 y 7, también porque recuperen el criterio construido para comparar los pasos de los robots.

Para obtener otra fracción es posible que recurran a trabajar con las fracciones equivalentes de denominador 35, técnica que también ha sido construida en problemas anteriores. Si solamente se producen soluciones con denominador 35, el docente podrá generar una discusión acerca de si éstas son las únicas posibles, para ello puede proponer encontrar una fracción en cada uno de los intervalos, entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{6}$, y entre $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{5}$.

En la segunda parte, cuando se pide una fracción de denominador 20 comprendida en el mismo intervalo, se puede esperar que los alumnos busquen la equivalente a $\frac{1}{5}$ con denominador 20, que es $\frac{4}{20}$; la anterior con denominador 20 que es $\frac{3}{20}$; y la anterior, $\frac{2}{20}$, que es equivalente a $\frac{1}{10}$ y por tanto queda fuera del intervalo. Si consideran que $\frac{1}{7}$ es, a su vez, equivalente a $\frac{3}{21}$, habrán encontrado que la única solución posible es $\frac{3}{20}$. En este problema se ponen en juego varios criterios y técnicas de comparación aprendidas hasta aquí.

Problema 5

¿Es verdad que $\frac{667}{1.000}$ es la primera fracción después de $\frac{2}{3}$?

Comentarios sobre el problema

El objetivo de este problema es discutir en clase que no hay primera fracción. Para arribar a esta conclusión el docente podrá proponer cambiar esta fracción por cualquier otra. Los alumnos podrán usar lo aprendido hasta aquí y concluir que, cualquiera sea la fracción que se tome, siempre es posible encontrar otra en el punto medio: por tanto, no hay ninguna fracción siguiente a $\frac{2}{3}$.

No hay posibilidad de determinar una fracción como consecutiva de otra; esta idea de que en el conjunto de números racionales no hay siguiente es bastante resistida por los estudiantes y necesitará nuevos encuentros para que sea comprendida por todos.

Problema 6

Primera parte

Encontrar una fracción mayor que $\frac{3}{8}$ y menor que $\frac{13}{20}$:

a) con denominador 5,

b) con numerador 9,

c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Segunda parte

Encontrar una fracción equivalente a $\frac{3}{8}$:

a) con denominador 5,

b) con numerador 9,

c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Tercera parte

Encontrar una fracción positiva y menor que $\frac{3}{8}$:

a) con denominador 5,

b) con numerador 9,

c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

PRIMERA PARTE

Uno de los objetivos de este problema es estudiar la existencia, o no, de fracciones en ciertos intervalos. En la marcha de la resolución de cada ítem, se pedirá a los alumnos que estudien la cantidad de soluciones posibles en cada caso.

Una estrategia posible para resolver el ítem **a)** será la búsqueda de fracciones equivalentes de denominador 40 para los extremos del intervalo, que no es más que encontrar el m.c.m. entre 8, 20 y 5. A esta solución se podrá llegar también trabajando con la recta numérica, para lo cual será necesario encontrar una partición de la unidad adecuada que permita marcar octavos y veinteavos.

Lo que ha de quedar como conclusión es que hay sólo dos fracciones que cumplen esa condición.

Otra estrategia podrá ser escribir las expresiones decimales de los números $\frac{3}{8}$ y $\frac{13}{20}$ realizando las correspondientes divisiones con la calculadora. Luego, comparar con las expresiones decimales correspondientes a $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$,...

Para el ítem **b)**, es posible transformar la fracción $\frac{3}{8}$ en $\frac{9}{24}$ y, luego, tener en cuenta que para lograr números más grandes, con el mismo numerador, hay que achicar el denominador. Los números $\frac{9}{23}$, $\frac{9}{22}$, $\frac{9}{21}$, $\frac{9}{20}$ son entonces cada vez más grandes y todos ellos se encuentran a la izquierda de $\frac{13}{20}$, pues el último lo está. Será necesario seguir estudiando el problema para denominadores más pequeños. Hasta 14 se obtiene una solución, pero con 13 ya no. Una manera de decidir cuáles de éstas son soluciones y cuáles no es apelar a la división, o al trabajo con fracciones equivalentes.

La diferencia con el ítem anterior es que ahora los números no se ubican a la misma distancia en la recta.

Una complejización de este problema consiste en proponer a los alumnos que busquen ahora las fracciones que se encuentran dentro de este intervalo, pero con numerador 7 u 8, para luego poder trabajar sobre la conjetura de que hay tantas soluciones posibles como lo indica el numerador de la fracción.

Para resolver el ítem **c)**, los alumnos podrán apoyarse en lo realizado en el ítem **a)**, y encontrarán fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ con denominador 10, multiplicando por 2. Luego, sucesivas multiplicaciones por diez darán las infinitas soluciones posibles con denominadores que son potencias de diez, pues siempre es posible subdividir el denominador en 10 partes iguales. A diferencia de los dos ítemes anteriores, las soluciones ahora no se encuentran separadas en la recta.

SEGUNDA PARTE

Para la primera pregunta, los estudiantes pueden apoyarse en la fracción equivalente a $\frac{3}{8}$ con denominador 40 que encontraron antes. El asunto es que esta fracción no puede ser simplificada para ser expresada con denominador 5, pues 5 y 8 no son múltiplos entre sí. Representar la situación en la recta puede servir para identificar que los octavos y los quintos coinciden sólo en algunos puntos.

En el ítem **b)**, como 3 es divisor de 9, es posible hallar una fracción equivalente a la dada con este numerador.

El análisis realizado en el ítem **c)** de la primera parte será una herramienta para resolver el ítem **c)** de esta segunda parte. Los alumnos podrán concluir que también hay infinitas fracciones en este caso; sin embargo, habrá que excluir a las de denominador 10 y 100, porque la fracción decimal equivalente a $\frac{3}{8}$ es $\frac{375}{10.000} = 0{,}0375$.

Tercera parte

Los alumnos ya conocen que $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ son mayores que $\frac{3}{8}$, con lo cual para resolver el ítem **a)** podrán conjeturar que $\frac{1}{5}$ es la única solución posible. Para validarlo podrán comparar $\frac{1}{5}$ con $\frac{3}{8}$, por cualquiera de los procedimientos que ellos manejan.

Para el ítem **b)**, también podrán apoyarse en parte del trabajo hecho anteriormente, pues saben que $\frac{9}{23}$ es la primera fracción de numerador 9 mayor que $\frac{3}{8}$. Nuevamente podrán recurrir a la idea de que con numerador fijo, y tomando denominadores cada vez más grandes, resultan números cada vez más pequeños. Esto podrá permitir a los alumnos concluir que hay infinitas fracciones con numerador 9 y denominador mayor a 23.

Sería interesante poner en discusión en la clase el hecho de que estas fracciones *se van acercando* cada vez más a cero sin llegar nunca a dar este resultado.

Como se dijo anteriormente, el trabajo con los problemas no se cierra en la resolución. Muchas veces es posible ir más allá, hacer algo más y que los estudiantes vuelvan a tener participación en esta tarea. Así, a partir de este problema, el profesor podrá proponer discutir la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

- **a)** Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número entero.
- **b)** Entre dos números enteros, hay siempre un número fraccionario.
- **c)** Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número fraccionario.
- **d)** Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número fraccionario de denominador 10.
- **e)** Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número fraccionario cuyo denominador es una potencia de 10.

Esta serie de afirmaciones, a validar o refutar, persiguen como finalidad recuperar y sintetizar en una serie de enunciados lo trabajado antes, para ir construyendo la noción de densidad del conjunto numérico de los racionales.

La afirmación **a)** resulta falsa, y bastará un contraejemplo para mostrar que no siempre es posible encontrar un entero entre dos fracciones dadas. Por ejemplo, entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$.

Para probar la validez de la afirmación **b)**, es posible siempre recurrir a la estrategia de la búsqueda del punto medio entre dos fracciones cualesquiera, o a las infinitas subdivisiones en potencias de 10 (o de cualquier otro número) del intervalo elegido.

Para sustentar la validez de la afirmación **c)**, se podrá apelar nuevamente al recurso de la identificación del punto medio o a cualquier otro tipo de estrategia, ya que no existe restricción alguna sobre el valor del numerador o denominador de la fracción buscada.

La afirmación **d)** es probable que genere cierta discusión y controversia, pues lo que a simple vista parece posible, dependiendo de las fracciones elegidas, se tornará imposible. Por ejemplo, entre $\frac{11}{21}$ y $\frac{53}{100}$ no existe ninguna fracción con denominador 10, pues $\frac{5}{10}$ es menor que $\frac{11}{21}$, y $\frac{6}{10}$ es mayor que $\frac{53}{100}$.

Para decidir sobre la validez de la afirmación **e)**, podrán apoyarse en la posibilidad de escribir un número fraccionario en escritura decimal, y en que siempre es posible dividir el intervalo dado en potencias de 10.

Problema 7

1. Encontrar, si es posible, un número decimal *a*, de manera que el número *a + 0,00001* tenga *la misma* cantidad de cifras decimales no nulas que *a*.

2. Encontrar, si es posible, un número decimal *a*, de manera que el número *a + 0,00001* tenga *mayor* cantidad de cifras decimales no nulas que *a*.

3. Encontrar, si es posible, un número decimal *a* de cinco cifras decimales no nulas, de manera que el número *a + 0,00001* tenga *mayor* cantidad de cifras decimales no nulas que *a*.

4. Encontrar, si es posible, un número decimal *a*, de manera que el número *a + 0,00001* tenga *menor* cantidad de cifras decimales no nulas que *a*.

5. Encontrar, si es posible, un número decimal *a*, de manera que el número *a + 0,00001* tenga *exactamente dos cifras* decimales no nulas.

6. Encontrar, si es posible, un número decimal *a*, de manera que el número *a + 0,00001* sea entero.

Comentarios sobre el problema

El objetivo de este problema es discutir el funcionamiento de la relación “siguiente” que es válida en N, pero no en Q. Se trabaja con números decimales; para resolverlo se apela al conocimiento de los valores posicionales.

En el ítem **1**, la última cifra no puede ser 0 ni 9.

En el ítem **2**, a debe tener más de 5 cifras decimales, y la posición de los milésimos no puede ser 0 ni 9.

En el ítem **3**, no es posible encontrar un número decimal de 5 cifras decimales, de manera que tenga más de 5 cifras después de sumar 0,00001; porque si se pone como última cifra 9, el mayor dígito, al sumar 1 queda 0 en la posición de los diezmilésimos. Este argumento permite resolver el ítem **4**, ya que se debe poner 9 en el último lugar para que cumpla con la condición.

En el ítem **5** se trata de que solamente las tres últimas cifras sean 9, y para resolver el ítem **6** se amplía esta estrategia escribiendo un número cuyas 5 cifras decimales sean 9.

Problema 8

1. Encontrar, si es posible, un número decimal entre $\frac{21}{40}$ y $\frac{22}{40}$.
2. Encontrar, si es posible, un número decimal entre $\frac{21}{41}$ y $\frac{21}{40}$.
3. Encontrar, si es posible, dos números fraccionarios, de manera que entre ellos no haya ningún número con dos cifras decimales no nulas.
4. Encontrar, si es posible, dos números decimales, de manera que entre ellos no haya ningún número fraccionario de denominador 7.

Comentarios sobre el problema

Las fracciones que se eligieron en los ítemes **1** y **2** ponen en cuestión la idea de "siguiente de una fracción" y las reglas para escribir los decimales comprendidos en el intervalo.

En el ítem **1**, los alumnos nuevamente podrán encontrar infinitos números decimales con la condición que sean del orden de los centésimos, milésimos, etcétera. Podrán llegar a esta conclusión dividiendo ambos números, o encontrando la fracción decimal equivalente a $\frac{21}{40}$, que será con denominador 100 ó mayor.

En el caso del ítem **2**, también hay infinitos números, pero no se forman con la serie de naturales consecutivos en las diferentes posiciones decimales, como sucede en el ítem **1**; sin embargo en los dos casos hay infinitos números decimales. Los alumnos podrán analizar estas diferencias producto de que en el ítem **1** los extremos del intervalo son fracciones decimales, y en el ítem **2** un extremo es una expresión decimal periódica.

En el **ítem 3**, a partir de lo trabajado en **2** los alumnos podrán ensayar con fracciones no decimales, llegando de este modo a concluir que la solución son las fracciones de denominador 9, 99, 999, etcétera.

En el **ítem** 4, tomando en cuenta lo trabajado en **2** podrán deducir que siempre es posible encontrar 2 decimales comprendidos entre $\frac{2}{7}$ y $\frac{3}{7}$.

Con este problema, nuevamente se puede continuar un trabajo que involucre a los alumnos en discutir la verdad o la falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Entre dos números decimales hay siempre un número decimal.
b) Entre dos números de cinco cifras decimales, hay siempre un número fraccionario.
c) Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número decimal.
d) Entre dos números fraccionarios, hay siempre un número fraccionario cuyo denominador es una potencia de 10.

Esta serie de conjeturas tienen como objetivo afianzar la construcción de la noción de densidad del conjunto de los racionales, que había sido trabajada, en su oportunidad, en el **problema 5** para fracciones, pero que ahora se retoma y se amplía al introducir las expresiones decimales.

Otros problemas que abarcan aspectos de la relación decimal-fracción pueden encontrarse en el Anexo del *Programa de Matemática, primer año,* ejemplos 13 y 14, pp. 61-62.

RECTA NUMÉRICA

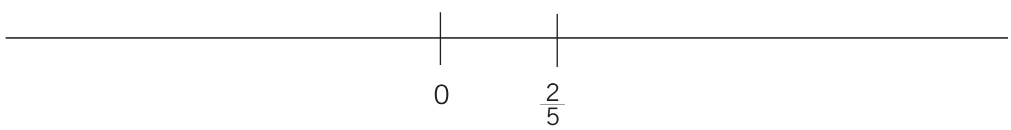
La recta numérica ya ha sido utilizada como herramienta para resolver los problemas de robots del **capítulo 2**, y varios de los problemas anteriores de este capítulo. Ahora será tomada como objeto de estudio en sí misma.

El trabajo en la recta numérica con racionales se apoya en el trabajo que se hizo con enteros. Se presenta la recta como un contexto útil para introducir los racionales negativos, estudiarlos como objetos matemáticos y profundizar la noción de orden y densidad en Q.

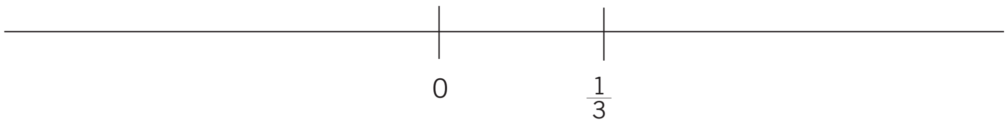
El orden de presentación de los problemas de este capítulo no implica secuencia; el docente podrá usarlos en el momento que lo considere más adecuado según el proceso de estudio del tema. Es posible comenzar trabajando el orden en la recta numérica y, luego, la densidad.

PROBLEMA 9

a)
Ubicá –1 en la recta que sigue:

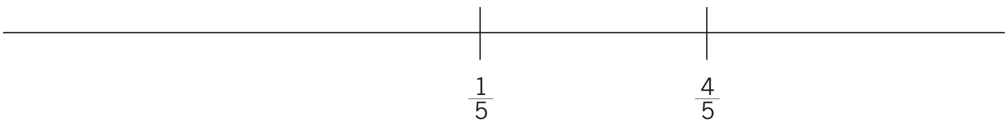


Ubicá $\frac{3}{4}$ en la recta que sigue:



b)

Ubicá el 0 en las siguientes rectas:



Comentarios sobre el problema

En los problemas del ítem **a)**, se propone ubicar fracciones dado el origen de la recta; en el ítem **b)**, se propone ubicar el 0 a partir de fracciones dadas.

En el ítem **a)**, podrán marcar la mitad del segmento considerado, luego cinco veces esa unidad para determinar dónde se encuentra el 1; a continuación esa misma medida, desde 0 hacia la izquierda, permitirá marcar -1.

Para ubicar $\frac{3}{4}$, habrá que trasladar 3 veces la distancia entre 0 y $\frac{1}{3}$ para marcar 1 y, luego, dividir la unidad en 4 partes iguales.

Para resolver los problemas del ítem **b)**, se espera que los alumnos desplieguen distinto tipo de estrategias en función de los datos. Se dan una o dos fracciones, negativas o positivas; se espera llegar a concluir que para encontrar unívocamente la ubicación de una fracción es necesario tener la ubicación de dos números racionales.

Ubicar el cero implica tomar en cuenta toda la recta y el hecho de que los negativos se encuentran a la izquierda del mismo. Cuando se dan dos fracciones positivas con igual denominador, como es el caso de $\frac{1}{5}$ y $\frac{4}{5}$, alcanza con determinar la cantidad de quintos que hay entre ambas fracciones y dividir el intervalo en esa cantidad de partes iguales para definir la medida del intervalo $[0, \frac{1}{5}]$; de esta manera, se logra ubicar el lugar del número 0.

Para el caso de fracciones positivas de distintos denominadores ($\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$) habrá que apelar a la búsqueda de las fracciones equivalentes ($\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$), con lo cual el problema se reduce al caso anterior.

En los casos en que se consideran fracciones negativas y positivas de igual denominador (por ejemplo, $-\frac{5}{3}$ y $\frac{1}{3}$), se podrá pensar que la distancia que separa ambas fracciones es 6 veces $\frac{1}{3}$; por tanto, habrá que dividir el intervalo en 6 partes iguales. Discutir esta estrategia supone considerar la distancia que separa a cada fracción de cero, que es trabajar con la noción de módulo sin necesidad de hacerla explícita.

Si los datos son fracciones positivas y negativas de denominadores distintos, habrá que apelar a la búsqueda de fracciones equivalentes.

PROBLEMA 10

a) ¿Es posible hallar un número entero que se encuentre entre $-\frac{6}{5}$ y $-\frac{1}{2}$? ¿Cuántos hay?

b) ¿Es posible hallar un racional con denominador 4 que se encuentre entre $-\frac{6}{5}$ y $-\frac{1}{2}$? ¿Es el único? ¿Y con denominador 7?

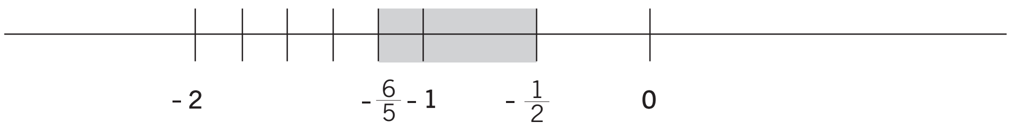
COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

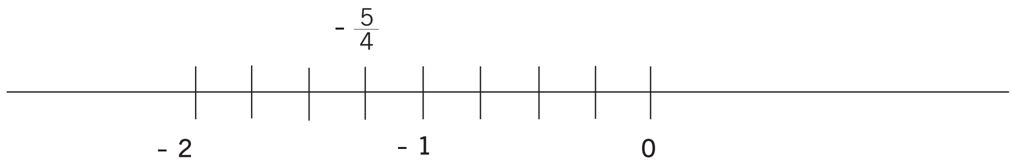
Para resolver **a)**, los alumnos podrán pensar los números como positivos y luego trasponer los resultados obtenidos considerando los opuestos. Podrán anticipar que $\frac{6}{5}$ es mayor que 1, y $\frac{1}{2}$ es la mitad del intervalo [0,1]; por tanto, el único entero posible es 1. Si trasponen este resultado a los opuestos, llegarían al número -1.

Apoyarse en la recta numérica tiene la ventaja de permitir trabajar directamente sobre la semirrecta negativa. Podrán ubicar en la recta ambos extremos del intervalo dividiéndola en quintos y medios. De esta manera, queda determinado que el único entero que se encuentra entre estas dos fracciones es -1, que puede admitir otro tipo de escrituras, según el denominador que se esté considerando $-\frac{5}{5} = -\frac{2}{2} = -1$.

En **b)** se pone como condición buscar un racional de denominador 4; una estrategia posible es escribir todas las fracciones negativas posibles de denominador 4, y marcarlas para decidir cuáles encajan en el intervalo. Otra estrategia posible será escribir -1 como $-\frac{4}{4}$, y comparar con los extremos del intervalo las otras fracciones negativas de denominador 4.

Trabajar la subdivisión de la recta, en tantas partes como indica el denominador, podrá ser de utilidad para visualizar que $-\frac{5}{4}$ es mayor que $-\frac{6}{5}$ y, por tanto, está fuera del intervalo marcado; mientras que $-\frac{3}{4}$ queda dentro.



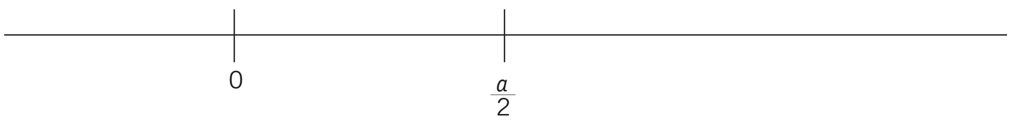


Estas mismas estrategias se podrán repetir para buscar las fracciones de denominador 7.

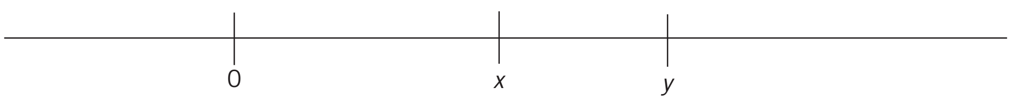
El docente podrá plantear una discusión preguntando si es posible encontrar fracciones con cualquier denominador entre esos números, y analizar que cuanto más grandes sean los denominadores, mayor será la cantidad de fracciones dentro del intervalo pedido.

Problema 11

a) Supongamos que a es un número cualquiera: en la siguiente recta se ubicó $\frac{a}{2}$. ¿Dónde ubicarías a ; $-a$ y $\frac{a}{3}$?



b) A partir de los datos que se dan en el dibujo de la recta, ubicar, cuando sea posible, $\frac{x}{2}$; $\frac{y}{3}$; $2 . x$; $-y$; $y + 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$.



Comentarios sobre el problema

Resolver este problema requiere aceptar la escritura literal para números indeterminados: es una forma de comenzar a algebrizar el tratamiento de los racionales, problemática que también se aborda en los **capítulos 4** y **5**.

Para resolver el ítem **a)**, los alumnos deberán trasladar la distancia 0, $\frac{a}{2}$ para marcar a. Luego, trasladar esa medida hacia la izquierda del 0 y marcar $-a$.

Para ubicar $\frac{a}{3}$, bastará con dividir el intervalo (0;a) en tres partes iguales.

Para representar la mitad de x, la tercera parte de y, o el doble de x, tarea del ítem **b)**, los alumnos podrán apelar a las estrategias usadas antes. Será útil someter a discusión la ubicación de $y + 1$, que no es posible porque tampoco se sabe ni es posible saber dónde está 1.

Ubicar $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$ podrá movilizar distintas estrategias de resolución, oportunidad que el docente retomará en una discusión acerca del significado del algoritmo de la suma de fracciones.

Sería interesante incluir algún otro problema, donde la letra a designe un número colocado a la izquierda del 0. Suele resultar difícil de aceptar para los alumnos el hecho de representar un número negativo sin la explicitación del signo menos en su escritura; deberían haber enfrentado esta dificultad trabajando con enteros y ésta es una buena oportunidad para volver sobre ella a propósito de los números racionales.

Capítulo 4

Producto en Q^+

La multiplicación de fracciones en el contexto de área de rectángulos resulta fértil para trabajar el sentido de la multiplicación, y permite que los estudiantes puedan resolver cuestiones en el campo numérico y algebraico. Si bien las magnitudes están presentes, el cálculo con unidades de medida no es objeto de trabajo específico en estos problemas.

Se intenta aportar sentido a la producción y al uso del algoritmo de multiplicación de fracciones, a partir de la resolución de los problemas que se proponen.

La idea es poner en discusión los cambios que sufren las operaciones al pasar de los números naturales a los números racionales. El funcionamiento de los números racionales supone rupturas con relación al de los números naturales y enteros, especialmente en las operaciones y, en particular, en la multiplicación.

En este sentido, se espera que los alumnos, después de este trabajo, lleguen a comprender que:

- La multiplicación no puede ser pensada como la abreviatura de una suma (salvo en casos de algún factor entero).
- Hay una ruptura en relación con la multiplicación y el orden: no siempre la multiplicación de fracciones da por resultado productos mayores que sus factores.
- Dados dos números racionales distintos de cero, siempre es posible pasar de uno a otro a través de la multiplicación de uno de ellos por un tercer número racional.

Los tres primeros problemas, entonces, proponen trabajar la multiplicación de fracciones en el contexto de área de rectángulos.

En los tres últimos problemas del capítulo, se propone un trabajo de algebrización con números racionales que retoma lo hecho para producir fórmulas en N, y formular y validar conjeturas en Z, enfoque que introduce la letra como número general.

Problema 1

En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno y el ancho, dos quintos del ancho del mismo.
¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

Comentarios sobre el problema

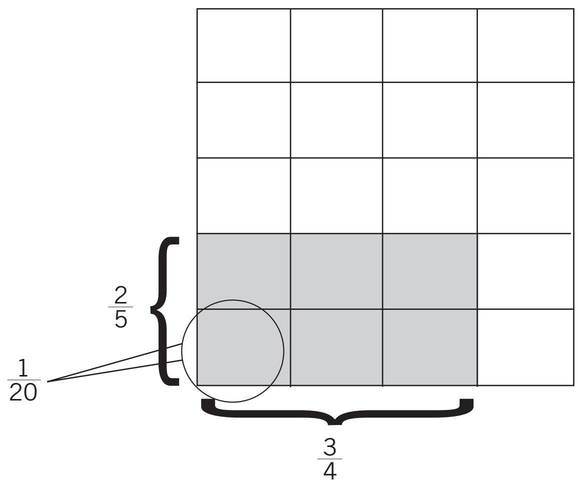
Este problema utiliza el área para contextualizar la multiplicación de fracciones, y empezar a comparar el funcionamiento de los naturales y de los racionales en torno a la multiplicación. En este caso, el problema adquiere mayor significado si, previamente, se ha trabajado el concepto de multiplicación de naturales en el contexto de área.

Una posible estrategia podrá ser dibujar el cuadrado, dividir un lado en 4 partes y, el otro, en 5; marcar las divisiones y dibujar el rectángulo que representa la escuela.

Para determinar el área que ocupa la escuela, se cuenta la cantidad de rectángulos en que queda subdividido el cuadrado original que representa al terreno. Cada uno de estos rectángulos es $\frac{1}{20}$ de área del cuadrado. La escuela ocupa 6 veces $\frac{1}{20}$; por tanto, 6. $\frac{1}{20}$ es $\frac{6}{20}$ que es el área de la escuela.

En este problema no se apela a la utilización de unidades de medida convencionales, como son los centímetros o metros. Se trata de identificar una fracción como unidad de referencia: $\frac{1}{20}$ es la unidad que se toma en cuenta para determinar el área.

Esta estrategia le da sentido al algoritmo de la multiplicación de fracciones que algunos alumnos podrían ya conocer de la escuela primaria. Un lado es 3 veces $\frac{1}{4}$; el otro es 2 veces $\frac{1}{5}$; por tratarse de un rectángulo, el área es el producto de los lados $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$; la multiplicación de los denominadores (4 . 5 = 20) indica la cantidad de rectángulos en que se subdivide el cuadrado, y el producto de los numeradores (3 . 2 = 6) indica el número de rectángulos de $\frac{1}{20}$ que ocupa la escuela.



El profesor podría proponer que busquen otros rectángulos de área $\frac{6}{20}$, situación que puede dar lugar a que los alumnos dibujen otros rectángulos de igual forma, pero en distinta ubicación, o de distinta forma, como sería el rectángulo de lados $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{4}$ (si se mantiene el cuadriculado original).

También se puede pedir que organicen otras configuraciones que conserven el área, pero no la forma rectangular.

PROBLEMA 2

a) Se quiere que la escuela siga teniendo forma rectangular y ocupe la misma área, pero que uno de sus lados sea la mitad del lado del terreno. ¿Qué parte del lado del terreno es el otro lado?

b) Y si un lado fuera $\frac{6}{7}$, ¿cuál sería el otro lado?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

En **a)** no se espera que los alumnos resuelvan una ecuación aplicando "las reglas del despeje", sino que pongan en juego otras estrategias: nuevamente podrán apoyarse en un dibujo o utilizar el algoritmo. Si apelan al dibujo, una posibilidad será que piensen que como uno de los lados es la mitad, hay que dividir el otro en 10 partes para obtener el doble; es decir, 20 subdivisiones. Otra alternativa sería pensar $\frac{1}{2}$, como equivalente a $\frac{2}{4}$, y entonces considerar $\frac{3}{5}$ sobre el otro lado, obteniendo un rectángulo de igual forma, pero en una ubicación distinta en el terreno. Si usan el algoritmo, podrán pensar por qué número deben multiplicar a 1 para obtener 6, y a 2, para obtener 20, resultando $\frac{6}{10}$ la fracción buscada.

En **b)**, la elección del denominador 7 (que no es divisor de 20) hace que el trabajo en el contexto geométrico se torne difícil y que los alumnos descubran la conveniencia de trabajar en el contexto numérico. Si un lado es $\frac{6}{7}$, el otro resulta $\frac{7}{20}$, si se quiere mantener la misma área.

Trabajar en el contexto numérico permite, también, poner en funcionamiento la idea de que siempre es posible encontrar un par de fracciones cualesquiera, tales que su producto sea $\frac{6}{20}$. Los estudiantes podrán, también, proponer productos de fracciones que matemáticamente equivalen a $\frac{6}{20}$, pero que no tienen sentido en el contexto del problema: por ejemplo, $\frac{6}{3} \cdot \frac{3}{20}$ da por resultado $\frac{6}{20}$, pero $\frac{6}{3}$ no se podría considerar porque la escuela superaría los márgenes del terreno sobre el cual se la quiere construir.

Problema 3

Y si el área ocupada por la escuela es $\frac{1}{5}$ de la del terreno, ¿qué parte del ancho y del largo del terreno podrían ser el largo y el ancho de la escuela?

Comentarios sobre el problema

Es probable que los alumnos vuelvan al contexto geométrico para encontrar las distintas soluciones, o para validar las mismas; sin embargo, algunos pares de fracciones, que matemáticamente cumplen lo pedido, no tienen sentido como solución (por ejemplo, $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}$ es un solución válida mientras que $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{5}$, no lo es). El contexto del problema reduce el trabajo a las fracciones menores que 1. Los alumnos podrán decidir valores para uno de los lados y determinar unívocamente el otro en función del primero.

Una limitación del contexto de área está en que sólo da sentido al trabajo con fracciones positivas. Cuando se incorporen las fracciones negativas, se podrá resignificar esta búsqueda de pares de fracciones.

Hasta aquí se trabajó con problemas en el contexto de áreas; se propone continuar el estudio de la multiplicación de fracciones con problemas planteados en el contexto numérico.

Problema 4

¿Por qué número hay que multiplicar a 4 para obtener por resultado 7? ¿Cuántos números hay que cumplan esta condición?

Comentarios sobre el problema

El objetivo de este problema es someter a revisión la noción ya construida por los alumnos de divisibilidad en números enteros: 7 no es divisible por 4 y, sin embargo, puedo encontrar un número racional que, multiplicado por 4, da 7.

No se busca que los alumnos resuelvan una ecuación, sino que pongan en juego otro tipo de estrategias. Una posible sería comenzar a probar con los enteros: con 1 no me alcanza, pero con 2 me paso; entonces, el valor está entre 1 y 2. Quizás sea un momento propicio para que los estudiantes, usando la calculadora, vayan ajustando la búsqueda con decimales hasta hallar el 1,75, que es la solución al problema.

El docente podrá aprovechar la oportunidad para introducir la noción de inverso multiplicativo: buscaremos la forma de obtener cuál es el número que multiplicado por 4 da 1.

$$4 \cdot a = 1$$

Todo número (excepto el cero) dividido por sí mismo da por resultado 1, en particular $\frac{4}{4}$ = 1; hay que interpretar ahora $\frac{4}{4}$ como 4 . $\frac{1}{4}$, para concluir que $a = \frac{1}{4}$ es el número buscado. Se puede plantear también la generalización: para cualquier número natural $n \cdot \frac{1}{n} = 1$.

Apoyándose en el razonamiento anterior, los alumnos podrán resolver 4 . b = 7 como

$1 \cdot 7 = 7 \quad 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \longrightarrow$

$4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 7 = 7 \longrightarrow 4 \cdot \frac{1 \cdot 7}{4} = 7 \longrightarrow$

$4 \cdot \frac{7}{4} = 7 \longrightarrow b = \frac{7}{4}$

Finalmente, analizar las diferentes estrategias de resolución podría ser de utilidad para validar que el número que multiplicado por 4 da por resultado 7 es único, pero que admite diferentes escrituras: $1{,}75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$

En este momento, el docente podrá prolongar la discusión acerca de la carencia de sentido de los conceptos de divisibilidad y múltiplo en el campo numérico de los racionales, devolviéndoles la situación a los alumnos a partir, por ejemplo, del siguiente planteo:

Ana dijo que como 4 . $\frac{7}{4}$ *da por resultado 7; entonces, 7 resulta múltiplo de 4. ¿Qué les parece esta afirmación?, ¿tendrá razón?*
Esta discusión se puede volver a retomar en el **problema 7**.

En los **problemas 5 y 6**, se presentan ecuaciones; nuevamente, el objetivo no es que los alumnos las resuelvan aplicando las "reglas del despeje", sino que exploren las situaciones buscando cuáles son los números que cumplen con la igualdad dada; para ello, será necesario trabajar con el inverso multiplicativo, que es el conocimiento que da sentido a dichas reglas.

Problema 5

a) Encontrar algún valor para el número a, de modo tal que se verifique la siguiente igualdad: $\frac{3}{4} \cdot a = 1$

b) Encontrar algún valor para el número a, de modo tal que se verifique la siguiente igualdad: $\frac{3}{7} \cdot a + 6 = 11$

Comentarios sobre el problema

Para resolver el ítem **a)**, los alumnos, si utilizan lo que aprendieron en las situaciones anteriores, podrán escribir:

G.C.B.A.

Si $3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \quad \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

$\longrightarrow 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \longrightarrow 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 1 \longrightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1 \longrightarrow a = \frac{4}{3}$

En el problema anterior se había trabajado el inverso multiplicativo de un natural que resultó ser la fracción de numerador 1 y denominador igual a ese natural. Este mismo razonamiento es el que justifica que el inverso multiplicativo de una fracción de numerador 1 resulta el mismo número natural que identifica al denominador ($n \cdot \frac{1}{n} = 1 \longrightarrow \frac{1}{n} \cdot n = 1$).

La propiedad conmutativa, válida para el producto de racionales, legitima esta operatoria. Por tanto, se puede inferir que el inverso multiplicativo de una fracción cualesquiera se obtiene a partir de invertir numerador por denominador de la fracción dada.

Se espera que estos conocimientos se pongan en funcionamiento a partir de la discusión generada en la clase. Cada docente decidirá el nivel de formalización que considere conveniente en función de las características del grupo de alumnos.

Respecto del ítem **b)**, reiteramos que no se presenta la ecuación para resolverla usando "las reglas del despeje", sino para que los alumnos exploren los números que cumplen con la igualdad dada. Del análisis global de la expresión, se desprende que para que la suma $\frac{3}{7} \cdot a + 6$ dé 11, $\frac{3}{7} \cdot a$ debe dar 5.

Una posible manera de resolver el problema sería apelar a la noción de inverso multiplicativo, ya trabajada en los problemas anteriores ($\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1$). Pero, como queremos obtener 5, multiplicamos el numerador de la fracción obtenido por el factor 5:

$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} = 1 \longrightarrow \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3} \cdot 5 = 5$

$\longrightarrow \frac{3}{7} \cdot \frac{7 \cdot 5}{3} = 5 \longrightarrow \frac{3}{7} \cdot \frac{35}{3} = 5 \longrightarrow a = \frac{35}{3}$

Problema 6

Encontrar una multiplicación que tenga $\frac{2}{5}$ como uno de sus factores y que dé por resultado $\frac{7}{36}$.

Comentarios sobre el problema

Los números del problema promueven la necesidad de recurrir al inverso multiplicativo. Como 7 no es múltiplo de 2, ni 36 de 5, habrá que buscar un número que multiplicado por $\frac{2}{5}$ dé 1. Ya en el **problema 5** se analizó que para obtener el inverso multiplicativo de una fracción basta con invertir numerador y denominador, resultando $\frac{5}{2}$ el número buscado. Por último, armamos los productos y, agrupándolos convenientemente, se obtiene el otro factor de la multiplicación pedida en un principio:

$$\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{36}\right) = \frac{7}{36} \longrightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{35}{72} = \frac{7}{36}$$

PROBLEMA 7

a) Encontrar diez multiplicaciones diferentes que den por resultado 5.
¿Cuántas multiplicaciones posibles hay?

b) Buscar números racionales a y b tal que su producto dé $\frac{7}{10}$.

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Para el ítem **a)**, la solución trivial 5 . 1 pone en evidencia que hay que extender la búsqueda a otros números que no sean los enteros, porque ésta es la única solución posible dentro de ese campo numérico. La estrategia de búsqueda de un factor, a partir de fijar otro, podrá ser de utilidad para encontrar distintas soluciones.

Lo nuevo de esta situación, en comparación con las anteriores, es que el alumno necesita elegir un factor y que esta elección condiciona la solución. Ese factor podría ser un número, cualquiera (entero o racional), con lo cual se obtienen infinitas soluciones, y cada solución está constituida por un par de valores. Así, si elige, por ejemplo 7, la solución será el par 7, $\frac{5}{7}$; si elige $\frac{2}{3}$, la solución será 5 . $\frac{3}{2}$; es decir, el par $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{2}$.

De este problema se puede concluir que siempre es posible encontrar un par de números racionales tal que su producto es un número entero, y que, en realidad, se pueden hallar infinitos pares.

Además, se podrán estudiar los ejemplos propuestos para poner en evidencia que la multiplicación no siempre agranda, como ocurre en los enteros.

Para resolver el ítem **b)**, los alumnos, usando lo aprendido en la resolución del ítem **a)**, podrían encontrar muchas soluciones y discutir que lo mismo pasaría si, en vez de $\frac{7}{10}$, se tratara de cualquier otro número racional.

Para promover una discusión interesante, a partir de la resolución de estos últimos problemas, se puede estudiar la siguiente afirmación:

Dado un número racional a no nulo y otro cualquiera b, siempre es posible encontrar un tercero c de manera de obtener $a \cdot c = b$.

Este hecho pone en evidencia la falta de interés de estudiar la divisibilidad en el conjunto Q.

Los tres problemas que siguen avanzan un poco en la algebrización, proponen la utilización de la letra, como variable para establecer relaciones y estudiar propiedades de la multiplicación y el orden.

Problema 8

a) El área de un rectángulo es 3, y la base mide 5, ¿cuánto debe medir la altura? Se arman ahora otros rectángulos, de modo que sus bases son aquéllas que resultan de dividir por 2, por 3, por 4... etcétera. La base del primer rectángulo y la altura son tales que el área de los rectángulos que se obtienen es siempre 3.

b) Completar las 7 primeras filas de la tabla.

c) ¿Cuál es la altura del rectángulo número 35 de la serie? ¿Y la del número 100?

Base	Altura	Área
5	....	3
$\frac{5}{2}$	....	3
$\frac{5}{3}$	....	3
....	....	3
....	....	3

d) Decidir si los siguientes racionales pueden ser base de algún rectángulo de la tabla:

$\frac{10}{40}$ $\qquad \frac{10}{33}$ $\qquad \frac{35}{91}$ $\qquad \frac{127}{139}$

Para los que puedan serlo, calcular la altura.

e) Escribir la fórmula que permita encontrar la altura de estos rectángulos, en función de su base.

f) Escribir la fórmula que permite calcular el área de cualquier rectángulo de esta serie en función de su base.

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Este problema se plantea en el contexto geométrico de cálculo de áreas de un rectángulo, y tiene como objetivo la recuperación del trabajo algebraico que se hizo con números naturales, que se retoma ahora para números racionales.

El docente podrá sugerir la organización de los datos en una tabla que ayude a estudiar cómo varía la altura, a partir de la variación de la base para mantener siempre el mismo valor del área, situación que permite trabajar también la proporcionalidad inversa. Todos estos conceptos entran en juego para responder los ítemes **b)** y **c)**.

Para resolver el ítem **d)**, los alumnos pondrán en juego la divisibilidad. Es bastante evidente que el primer número está en la tabla y el segundo no; el tercer número es menos transparente, aunque está en la tabla finalmente; podrán explicar que $\frac{127}{139}$ no puede expresarse de la forma $\frac{5}{n}$.
En este momento, se podrá plantear una discusión en relación con el siguiente hecho: asignando a la base valores cada vez más chicos, la altura crece cada vez más; en nuestro caso, si se toma $\frac{5}{n}$ tan chico como se quiera, la altura ($\frac{3}{5} \cdot n$) crece indefinidamente.
El ítem **e)** tiene como objetivo recuperar los conocimientos sobre función y sobre construcción de fórmulas (números naturales, primer año).
También el álgebra se pone en juego para resolver el ítem **f)**; se espera que los alumnos lleguen a producir la fórmula:

$$\frac{3}{5}\, n \cdot \frac{5}{n} = 3$$

En este caso, se podrá trabajar con la fórmula para dar sentido a la simplificación de expresiones algebraicas.

Los **problemas 9** y **10** plantean ecuaciones e inecuaciones. No se espera que el alumno haga un trabajo formal con "pasaje de términos y despeje", sino que busque las soluciones poniendo en funcionamiento los conocimientos sobre orden y multiplicación de racionales.

PROBLEMA 9

a) Encontrar un número a, tal que $a \cdot \frac{5}{3} = 1$. ¿Cuántos hay?

b) Encontrar un número a tal que $a \cdot \frac{5}{3} < 1$. ¿Cuántos hay?

c) Buscar todos los números racionales *a* que multiplicados por $\frac{5}{3}$ den un número comprendido entre 0 y 1. ¿Cuántas posibilidades hay en este caso?

d) Buscar todos los números racionales *a* que multiplicados por $\frac{5}{3}$ den un número comprendido entre 1 y 2. ¿Cuántas posibilidades hay en este caso?

Comentarios sobre el problema

En los ítemes **a)** y **b)** no se especifica el conjunto numérico. Es probable que los alumnos resuelvan pensando en enteros, recordando lo trabajado en el **problema 4** de este mismo capítulo. Se mantiene esta ambigüedad con el propósito de dar espacio al docente para discutir las soluciones en función del tipo de número.

Se trata de analizar el tipo de números que son soluciones y el número de soluciones posibles. Se podrá discutir las diferencias entre Z y Q, y la pertinencia de las respuestas en función del conjunto elegido. También, a partir del trabajo realizado, se podrá llegar a institucionalizar las reglas de "despeje".

En los ítemes **c)** y **d)** se trabaja con racionales; es una aplicación de lo discutido en **a)** y **b)**.
La solución al ítem **c)** se obtiene descartando los negativos de la solución del **b)**.
El ítem **d)** requiere tomar todos los números que no eran solución en los ítemes anteriores. La recta numérica puede ser una herramienta para pensar las soluciones.

Este problema es sólo una muestra; será necesario proponer otros para que los alumnos vayan adquiriendo confianza y seguridad en la utilización y el conocimiento de los racionales.

Problema 10

A continuación, se presentan desigualdades en las que la letra *a* representa un número racional cualquiera.

- Si te parece que la desigualdad es siempre verdadera, da una justificación.
- Si te parece que la desigualdad es siempre falsa, da una justificación.
- Si pensás que a veces es V y a veces F, da ejemplos para cada caso.

a) $4 . a > 4$
b) $4 . a > a$
c) $4 . a^2 > a^2$

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Lo nuevo de este problema es que pone en juego la forma de construir la verdad. Hay que discutir si los enunciados son verdaderos/falsos para todo racional, o verdaderos para algunos números y falsos para otros. Se trata de una práctica que genera en los alumnos la necesidad de argumentar.

El ítem **a)** es verdadero si a es mayor que 1; el **b)** en el caso de que a sea mayor que 0; y el **c)** es siempre verdadero para cualquier racional.

Los alumnos podrán probar con algunos números y validar con argumentos que pongan en juego las propiedades de la multiplicación en Q.

Armar nuevas conjeturas y validarlas también es una tarea que el alumno podrá hacer con una gestión por parte del docente que vaya en esa dirección.

Capítulo 5

Conjeturas y validación de propiedades en Q

En este capítulo, se presentan actividades que se apoyan en el trabajo propuesto en los capítulos anteriores. El objetivo es ahora el despliegue de una práctica propia de la actividad matemática: la elaboración de conjeturas y la discusión en torno a la validez de las mismas.

Se trata, fundamentalmente, de proponer a los alumnos situaciones que exijan un cierto nivel de exploración, de ensayos, y de elaboración de relaciones, que permita producir y validar una nueva propiedad. Esto promueve una actividad de formulación de estas propiedades, actividad que tiene un valor formativo importante en la paulatina complejización del trabajo matemático que deben ir asumiendo.

A través de estas actividades, se busca también que los alumnos se hagan cargo de encontrar o elaborar argumentos que den cuenta de lo correcto y de lo incorrecto, de lo general y de lo particular, de lo verdadero y de lo que no lo es, de las condiciones a partir de las cuales una cierta relación es válida, de la determinación de un cierto dominio de validez, etcétera.

Para tal fin, se han seleccionado situaciones vinculadas al orden y las operaciones en Q.

En los tres primeros problemas se propone la comparación de dos expresiones fraccionarias y la determinación del dominio de validez de ciertas desigualdades. En el problema **4**, se presenta una situación con el objeto de discutir explícitamente las relaciones entre la verificación en ejemplos y la validación de afirmaciones generales. En los últimos tres problemas, se pone en juego la elaboración de leyes generales y de argumentos para validarlas.

El trabajo que aquí se propone intenta ser un aporte para esta problemática didáctica que necesita ser tenida en cuenta en los distintos temas. Como se dijo en el **capítulo 1**, lograr que los alumnos incorporen como modo de trabajo la búsqueda de argumentos generales, para dar cuenta de la validez de una propiedad que se enuncia para todo número, es difícil y se constituye en un verdadero desafío para la enseñanza.

Problema 1

a) Se quiere comparar la fracción $\frac{18}{7}$ con las fracciones de la forma $\frac{9}{n}$, para n un número natural. ¿Para qué valores de n natural se verifica que $\frac{18}{7} > \frac{9}{n}$?

b) Se quiere comparar la fracción $-\frac{21}{4}$ con las fracciones de la forma $\frac{n}{5}$, para n un número negativo. ¿Para qué valores de n negativo se verifica que $-\frac{21}{4} < \frac{n}{5}$?

Comentarios sobre el problema

La intención de estos problemas no es que los alumnos apliquen reglas mecánicas. Se trata de comparar fracciones con recursos propios. Como $\frac{18}{7}$ es "2 y pico", seguro será menor que 9, que $\frac{9}{2}$, que $\frac{9}{3} = 3$. Esto descarta los valores $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. Para $n = 4$ se obtiene la fracción $\frac{9}{4}$, que también es "2 y pico". Para estudiar este caso, se puede pensar en buscar una fracción equivalente a $\frac{9}{4}$ con numerador 18. Esto es $\frac{18}{8}$, con el mismo numerador que $\frac{18}{7}$, pero denominador mayor. Entonces, usando propiedades trabajadas en capítulos anteriores, se puede concluir que $\frac{9}{4}$ es menor que $\frac{18}{7}$. Por tanto, $n = 4$ es un valor que verifica la desigualdad.

A partir de allí, puede observarse que la fracción $\frac{9}{n}$ se hace cada vez más chica.

Se obtiene, entonces, que la propiedad es cierta para todo natural $n \geq 4$.

Este trabajo podría acompañarse de la ubicación en la recta numérica del número $\frac{18}{7}$ y de varias de las soluciones halladas. Se pondría entonces de manifiesto que en un intervalo acotado se encuentran infinitas fracciones, recuperando la noción de densidad trabajada en el **capítulo 3**.

A continuación, se podrán proponer a los estudiantes otras desigualdades de este tipo, verdaderas para subconjuntos de los naturales; por ejemplo, para $n > 5$ o para $n < 8$.

En la resolución **b**, es esperable que los alumnos encuentren mayores dificultades al tratar con fracciones negativas.

La ubicación del número $-\frac{21}{4}$ en la recta numérica puede ser un punto de apoyo importante para encarar la resolución. Las fracciones que se están buscando que tienen la forma $\frac{n}{5}$ se ubicarían a la izquierda de 0, y a la derecha de $-\frac{21}{4}$, acotando el intervalo de búsqueda. Probando con los valores $n = -1, -2, -3...$ se concluye que la desigualdad es cierta para los valores $-5 \leq n \leq 0$.

PROBLEMA 2

En lo que sigue, n es un número cualquiera negativo.

a) Encontrar, si es posible, valores de n para que $\frac{n}{2} < \frac{3n}{4}$.

b) ¿Será cierto que $\frac{3}{2n} > \frac{2}{n}$, para todo n negativo?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

En el ítem **a)**, el enunciado invita a la exploración. Pero será una exploración sin resultado. El profesor debería, entonces, transformar el problema inicial: se trata ahora de probar que no hay ningún valor de n negativo que verifique lo pedido.

Para validar esto último, una posibilidad es tratar con fracciones equivalentes y lograr que ambas tengan el mismo denominador o numerador. A partir de allí, comparar numeradores (o denominadores) para establecer la comparación, considerando que n es negativo.

Otra posibilidad es recurrir a la recta numérica, considerando primero la situación para n positivo, interpretando $\frac{n}{2} = \frac{1}{2}\,n$ y $\frac{3n}{4} = \frac{3}{4}\,n$. De esta manera se podría concluir que, si n es positivo, $\frac{1}{2}\,n$ es siempre menor que $\frac{3}{4}n$. Por tanto, al considerar valores de n negativos, la situación aparece en "espejo" al otro lado del 0, y resulta ser $\frac{1}{2}\,n$ siempre mayor que $\frac{3}{4}\,n$.

En el ítem **b)**, se espera que los alumnos comiencen explorando, con valores de n negativo, la conjetura y arriben en este caso a evidencias sobre su validez.

Un argumento general que permite validarla podría ser considerar que $\frac{2}{n} = \frac{4}{2n}$, y luego comparar $4 \cdot \frac{1}{2n}$ y $3 \cdot \frac{1}{2n}$. La primera cantidad resulta menor, ya que $\frac{1}{2n}$ es negativo, y 4 veces esa cantidad se ubicará más a la izquierda que 3 veces ella.

Una nueva cuestión que aparece es que para *fracciones de igual denominador negativo, es menor la de numerador mayor*, cuestión que debería ser analizada en otros ejemplos numéricos.

Tanto en el ítem **a)** como en el ítem **b)**, podría ocurrir que algunos alumnos abordaran el problema simplificando n, pero conservando el sentido de la desigualdad. Será necesario recuperar en el aula las razones por las cuales multiplicar por un número negativo invierte el signo de una desigualdad, problemática que debería haber sido tratada al estudiar desigualdades en el conjunto de números enteros.

La resolución de este problema no requiere de la "técnica de productos cruzados", muy cercana a la búsqueda de iguales denominadores. La aplicación de esta técnica en el ítem **b)** es delicada, porque al tratarse de dos multiplicaciones por números negativos, finalmente se conserva el sentido de la desigualdad.

Problema 3

Se trata ahora de comparar las siguientes fracciones, para distintos valores de n positivos: $\frac{20}{4n + 3}$ y $\frac{5}{n}$.
Ensayen con algunos ejemplos, establezcan una conjetura e intenten demostrarla.

Comentarios sobre el problema

A partir de una exploración con ejemplos, se puede conjeturar que la primera fracción es siempre menor que la segunda. Para validarla, se podría pensar en comparar $\frac{20}{4n + 3}$ y $\frac{20}{4n}$ (es equivalente a $\frac{5}{n}$), pues al tener ambas fracciones el mismo numerador, basta con analizar qué ocurre con los denominadores. En este caso, es sencillo ver que el primero es siempre mayor que el segundo, lo cual implica que la primera fracción es menor que la segunda.

Es esperable que muchos alumnos se convenzan con los ejemplos que van obteniendo y no consideren necesario dar algún argumento general. El problema siguiente tiene por objetivo trabajar explícitamente sobre las limitaciones de considerar como válido un enunciado general a partir de su verificación en algunos ejemplos.

Problema 4

Se propone una charla para presentar la situación a los alumnos antes de la formulación de la pregunta que ellos deberán estudiar.
Vamos a estudiar qué pasa con la fracción $\frac{7}{5}$ cuando se suma un número natural al numerador, y se resta ese mismo número al denominador. Por ejemplo, si sumamos y restamos 1, $\frac{7 + 1}{5 - 1}$, se obtiene el número 2. Prueben con otros números naturales, salvo el 5 (¿por qué?) ¿Será cierto que $\frac{7 + n}{5 - n}$ es siempre un número entero, para cualquier valor natural de $n = 5$?

Comentarios sobre el problema

El objetivo de este problema es poner en evidencia que una propiedad puede cumplirse para muchos números, sin ser verdadera para todos. En este caso, el primer natural para el cual $\frac{7 + n}{5 - n}$ no es un número entero, es $n = 10$.

Es muy probable que los alumnos comiencen a ensayar con los primeros números naturales, obteniendo los siguientes resultados:

$\frac{7 + 1}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$ que es un número entero.

$\frac{7+2}{5-2} = \frac{9}{3} = 3$ que es un número entero.

$\frac{7+3}{5-3} = \frac{10}{2} = 5$ que es un número entero.

$\frac{7+4}{5-4} = \frac{11}{1} = 11$ que es un número entero.

$\frac{7+6}{5-6} = \frac{13}{-1} = -13$ que también es un número entero.

Es decir, van obteniendo resultados enteros, y es probable que los ejemplos los lleven a concluir inductivamente que $\frac{7+n}{5-n}$ es un número entero para todo valor de n natural.

Ensayar con el valor $n = 10$ (quizás propuesto por el docente) permitiría discutir con los alumnos que la propiedad no es cierta para todo valor de n. En verdad, para ningún valor de n mayor que 17 se obtiene un número entero.

Resuelto el problema, el objetivo es reflexionar con los alumnos acerca de los límites del recurso de probar con ejemplos para asegurar la validez de una propiedad general. Esto no significa no valorar la actividad de exploración de propiedades vía distintos ejemplos. Probar con ejemplos es algo habitual para los alumnos y es parte del trabajo matemático: se trata de encontrar la riqueza y los límites de esta actividad.

Considerar estas cuestiones con los alumnos permite avanzar en la construcción de significado acerca de la actividad matemática de la clase.

Para cerrar el trabajo con este problema, el docente podría precisar el enunciado de la propiedad del siguiente modo:

"si $n \neq 5$ entonces $\frac{7+n}{5-n}$ es un número entero para cualquier valor natural n menor que 10".

Y pedir, entonces, una prueba para este enunciado.

Se trata ahora de identificar que basta con comprobar caso por caso para los 8 números del enunciado.

Es la oportunidad de discutir que cualquier afirmación que se haga sobre un conjunto finito de números sí se puede probar caso por caso. Nuevamente, se piensa sobre la matemática.

En los **problemas 5**, **6** y **7** se propone la exploración de relaciones de orden entre fracciones, donde los numeradores y denominadores están ligados por ciertas relaciones.

Problema 5

Con tres números naturales consecutivos se construyen dos fracciones y se las compara. Por ejemplo, con 3, 4 y 5, se obtiene $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Prueben con otros números consecutivos. ¿Se obtiene siempre la misma desigualdad?
¿Será posible enunciar una ley general para tres números naturales consecutivos cualesquiera?
¿Pueden probar esta ley que enuncian?

Comentarios sobre el problema

Para gestionar este problema en la clase, se sugiere pedir primero la exploración de la propiedad y, luego, solicitar la formulación de la ley general y la prueba de la misma.

Una primera cuestión a considerar es el modo en que se formula la ley general. No es esperable que los alumnos, en un primer momento, recurran a escrituras convencionales. Es parte del trabajo analizar la manera de formular y escribir esta ley, intentando que dicha formulación responda a las condiciones que propone el enunciado del problema.

Al tratarse de tres números consecutivos, la comparación se podrá establecer entre $\frac{n}{n+1}$ y $\frac{n+1}{n+2}$. También podría ser escrita de la siguiente manera: $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$.

Una manera posible de analizar su validez es a partir de la exploración, por ejemplo, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$; $\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$; $\frac{9}{10} < \frac{10}{11}$... al comparar lo que le falta a cada una de las dos fracciones para completar el entero. Siempre ocurre que a la segunda fracción le falta menos para llegar a 1. Es decir, se comparan los complementos al entero, con la ventaja de que estas fracciones son ahora de la forma $\frac{1}{n}$ y tienen las dos el mismo numerador. Con cualquiera de las dos escrituras, se llega a que la fracción de la derecha necesita una "porción" más pequeña para completar el entero.

Otra manera sería tratar de comparar las dos fracciones transformándolas hasta lograr igual numerador o denominador en las dos (esta técnica de comparación debería ir estabilizándose en la clase; mientras sea necesario, cada vez que aparezca, se puede volver a analizar la razón por la cual esta técnica funciona).

Si se parte de las expresiones $\frac{n-1}{n}$ y $\frac{n}{n+1}$, se puede multiplicar por $n - 1$ y por n, para igualar numeradores. Los denominadores serán entonces n^2 y $(n - 1) . (n + 1)$. Es el momento de revisar (o profundizar o encarar) el tratamiento algebraico referido a una doble distributiva. Esta propiedad admite un interesante despliegue en el marco geométrico que puede ser un punto de apoyo para la comprensión y la construcción de sentido de la misma.

Una vez resuelta la multiplicación, es sencillo establecer que, cualquiera sea el valor de n, $n^2 - 1 < n^2$, esto permite validar la conjetura desplegada sobre la comparación de las dos fracciones.

Si se opta por la modelización de los tres números consecutivos como n, $(n + 1)$ y $(n + 2)$, se enfrenta una complejidad algebraica similar: en este caso hay que poder realizar la cuenta $(n + 1) \,.\, (n + 1)$.

Como se enuncia en los programas, el álgebra se va construyendo como una herramienta de trabajo para estudiar propiedades de los números y las operaciones y, al mismo tiempo, la complejidad técnica de la operatoria algebraica va apareciendo al servicio de este trabajo. La actividad de producción de fórmulas en N y el trabajo sobre los números enteros son antecedentes de esta trama de trabajo algebraico que se va construyendo en el aula.

Cada docente (y para cada grupo particular de alumnos) deberá ir decidiendo dónde y cómo avanzar específicamente para el abordaje de cuestiones algebraicas técnicamente más complejas.

PROBLEMA 6

Con cuatro números naturales consecutivos se construyen dos fracciones de la siguiente manera:

- La primera fracción tiene por numerador al primero de los cuatro números y como denominador al tercero.
- La segunda fracción tiene como numerador al segundo de los cuatro números y como denominador al cuarto.

Por ejemplo, si los cuatro números consecutivos son 2, 3, 4 y 5, las fracciones que se construyen son $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{5}$. Si las comparamos, resulta $\frac{2}{4} < \frac{3}{5}$.
Si se prueba con otros cuatro números consecutivos, ¿resultará siempre la segunda fracción mayor que la primera?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

A partir de la exploración que realicen los alumnos con diferentes pares de fracciones, construidas según las condiciones planteadas en el problema, es probable que lleguen a una respuesta: la primera fracción es menor que la segunda.

Una vez más, es tarea del docente avanzar hacia la incorporación paulatina de otros modos de generalización en el aula.

Se trata de plantear ahora una nueva tarea: la formulación de una ley general en un lenguaje algebraico que permita –transformando quizás las expresiones, según las reglas que los alumnos están construyendo– leer información pertinente para la elaboración de una prueba.

Para comenzar, se propone analizar con los alumnos los posibles modos de escribir de manera general la relación que se pretende comprobar.

Una de dichas escrituras podría ser $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3}$ para cualquier valor de n natural.

A partir de esta escritura, una posibilidad sería "leer" que a la fracción de la izquierda le falta $\frac{2}{n+2}$ para completar la unidad, mientras que a la otra fracción le falta $\frac{2}{n+3}$, una cantidad menor.

Otra manera de elaborar una prueba, a partir de la misma escritura, requiere poner en funcionamiento, una vez más, la propiedad distributiva. Es decir, para estudiar si $\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3}$ se pueden transformar ambas fracciones en otras equivalentes, de manera que las nuevas tengan ambas el mismo denominador (o numerador).

Se obtiene en este caso $n\,(n + 3) < (n + 1)\,(n + 2)$. Esta última desigualdad es equivalente a $n^2 + 3\,n < n^2 + 3n + 2$. Y como ésta se verifica para cualquier valor de n natural, la ley será cierta.

Problema 7

Si ahora se consideran cuatro números naturales a, b, c y d con $a < b < c < d$, pero no necesariamente consecutivos los cuatro, ¿seguirá siendo válido que $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$?

Comentarios sobre el problema

En este problema se trata de investigar la posibilidad, o no, de extender el dominio de validez de las leyes que se estudian en los **problemas 5** y **6**.

Producto de la exploración que se desarrolle es esperable que aparezcan ejemplos en los cuales el enunciado es cierto: $5 < 10$ y $20 < 22$; luego, $\frac{5}{20} < \frac{10}{22}$, así como otros ejemplos en los cuales el enunciado es falso: $3 < 5$ y $8 < 20$, sin embargo, $\frac{3}{8} > \frac{5}{20}$.

Es decir, hay grupos de cuatro números que verifican el enunciado, en tanto que hay grupos de cuatro números que no lo verifican. Esto da una primera respuesta al problema.

Una nueva tarea será analizar que la ley estudiada en el **problema 6** permite producir muchos ejemplos de números para los cuales el enunciado es verdadero.

Otra tarea que puede resultar interesante para continuar el estudio sería presentar a los estudiantes tres números de menor a mayor, pero no consecutivos, y solicitarles que encuentren un cuarto número mayor que los tres de manera que no se cumpla la desigualdad de las fracciones. Por ejemplo, se proponen los números $3 < 7 < 10 < d$, y se pregunta cuánto puede valer d para que $\frac{3}{10} > \frac{7}{d}$. Una idea es notar que si d es muy grande, entonces $\frac{7}{d}$ se puede hacer "tan pequeño como uno quiera", y se podrá conseguir que sea menor que $\frac{3}{10}$. Otra posibilidad es "cruzar productos" y buscar que $3\,.\,d$ sea mayor que 70. Una exploración permite concluir que esto se logra para todo $d > 23$.

En el siguiente problema, se propone estudiar distintas variantes de la desigualdad $a + \frac{1}{a}$ 2, que es verdadera para todo número racional a positivo. Se estudia primero el problema para las fracciones de denominador 2 y, a continuación, para las fracciones de denominador 5, considerando que, de este modo, se avanza progresivamente en la complejidad y en el tratamiento del problema. Por eso se propone presentar a los alumnos cada ítem, luego de haber resuelto y discutido el anterior.

PROBLEMA 8

a) ¿Será cierto que $\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \geq 2$ para cualquier valor de n?

b) ¿Valdrá la desigualdad anterior para cualquier valor de n, si cambiamos el 2 por el 5?

c) ¿Será cierto que $\frac{n}{5} + \frac{5}{n} \geq 2$ para cualquier valor de n?

d) ¿Será cierto que $a + \frac{1}{a} \geq 2$ para cualquier valor de a racional positivo?

COMENTARIOS SOBRE EL PROBLEMA

Convendría presentar a los alumnos cada nueva pregunta después de haber trabajado y discutido la anterior.

Ítem a):
En la resolución del ítem **a)**, es esperable que los alumnos recurran a algunos ejemplos para dar cuenta de la validez o no del enunciado. Es así como se podrá identificar que:

- En el caso $n = 1$ resulta $\frac{1}{2} + 2 \geq 2$
- Para $n = 2$ queda $1 + 1 \geq 2$
- Para $n = 3$ se obtiene $\frac{3}{2} + \frac{2}{3} \geq 2$, lo que también es cierto, pues a $\frac{3}{2}$ se le suma un número mayor que $\frac{1}{2}$. Es decir, se puede argumentar sin hacer la cuenta.
- Para $n = 4$ ó $n > 4$ siempre se obtiene que el término $\frac{n}{2}$ es mayor o igual que 2, con lo cual se verifica para todo n.

Nuevamente se trata de un problema en el cual la exploración en algunos casos se completa con una breve observación general.

Ítem b):
Una vez más, recurrir a ejemplos permitirá deducir la falsedad del enunciado. Es decir, se verifica para $n = 1$. Pero para $n = 2$ no es válido, pues se obtiene $\frac{2}{5} + \frac{5}{2}$ que seguro es menor que 5, ya que a 2 y medio se le está sumando un número más chico que 1.

Este análisis de casos particulares, junto a una lectura de la expresión, podría permitir identificar que si $n = 25$, se obtiene un resultado mayor que 5, y a partir de allí siempre será cierto.

Es decir, se podría discutir con los alumnos cuál sería el dominio de validez de la desigualdad propuesta.

Ítem c):
Al igual que en los ítemes anteriores, es posible probar "a mano" que es cierto para valores de n hasta $n = 10$, y concluir que si $n > 10$, uno de los términos que se suman es mayor que 2; por tanto, toda la expresión será mayor o igual que 2.

Ítem d):
Los recursos utilizados, para probar los ítemes anteriores, resultarán insuficientes en este caso. O sea, se podrá identificar que para $a \geq 2$ vale, y que para $a < \frac{1}{2}$ también es cierta la desigualdad, con argumentos similares a los ítemes anteriores. Pero, para los valores de a que se encuentran entre $\frac{1}{2}$ y 2, habrá que apelar a otro recurso, ya que hay infinitos racionales y no se puede probar con todos ellos.

Es posible que en este ítem **d)** el docente deba proponer algún camino a seguir. Será necesario transformar la expresión para llegar a reconocer que, probar $a + \frac{1}{a} \geq 2$, es equivalente a probar $\frac{a^2 + 1}{a} \geq 2$. Y que esto es equivalente a demostrar que $a^2 - 2a + 1 \geq 0$.

No se espera que los alumnos reconozcan que la expresión de la izquierda es $(a - 1)^2$, sino que se propone un estudio de tal expresión para llegar a la conjetura a través de una lista de ejemplos con naturales. Es decir, aparece una nueva tarea que busca validar que $a^2 - 2a + 1 \geq 0$, y al probar con distintos ejemplos se puede conjeturar la siguiente igualdad: $(a - 1)^2 = a^2 - 2\,a + 1$. Para probar esta última igualdad se puede recurrir al uso de la doble distributiva.

Se trata de un trabajo que incorpora mayor complejidad técnica en el tratamiento de las expresiones algebraicas. Será necesario enfrentar a los alumnos a otros problemas que requieran estas técnicas, para que las mismas puedan ir siendo dominadas.

En este **capítulo 5**, se ha desplegado un posible trabajo en el aula que presenta una complejidad mayor que los capítulos anteriores, en la medida en que requiere centrarse en los modos de validar afirmaciones en matemática. La familiaridad de los alumnos con los números racionales y sus propiedades ayudará, sin duda, en este trabajo. Al mismo tiempo, formular conjeturas y validarlas permitirá una profundización de los conocimientos que se tienen sobre ese conjunto numérico.

De este modo, avanzar en la incorporación de rasgos esenciales de los modos de producir en matemática va de la mano de aprender más sobre sus objetos, las operaciones y las propiedades que los relacionan.

Anexo con problemas

Capítulo 1

Problema 1

Para preparar una pintura de determinado color se mezclan 10 litros de pintura blanca con 3 litros de pintura verde.

a) Por otro lado, se quiere hacer una mezcla que tenga la misma tonalidad pero usando 4 litros de pintura verde. ¿Cuántos litros de pintura blanca se deberán usar en este caso?

b) Si se ponen 7 litros de pintura blanca, ¿cuántos litros de pintura verde se deberá utilizar para obtener la misma tonalidad?

Problema 2

Si a una mezcla de 2 litros de pintura verde y 7 litros de pintura blanca se le agrega un litro de cada color, ¿se obtiene un color más claro o más oscuro?

Problema 3

¿Será cierto que las siguientes mezclas permiten obtener la misma tonalidad?
Mezcla 1: 9 litros de pintura verde y 21 de blanca.
Mezcla 2: 15 litros de pintura verde y 35 de blanca.

Problema 4

Se mezclaron 3 litros de pintura verde con 7 litros de pintura blanca.

a) ¿Qué otras cantidades mezcladas darán la misma tonalidad?

b) Escribir una fórmula que permita determinar la cantidad de litros de pintura de un color, en función de la cantidad de pintura

Problema 5

Consideremos todas las mezclas de pintura que aparecen en los problemas anteriores:

Verde	Blanca
3	10
2	7
3	8
9	21
3	7

a) Ordenarlas de la más oscura a la más clara.

b) Escribir la fórmula de cada una de las mezclas, que exprese la cantidad de pintura blanca en función de la cantidad de pintura verde. Ordenar los 5 números racionales que se obtienen como constante.

Problema 6

En esta tabla se presenta la cantidad de harina y agua que debe utilizarse para hacer vainillas.

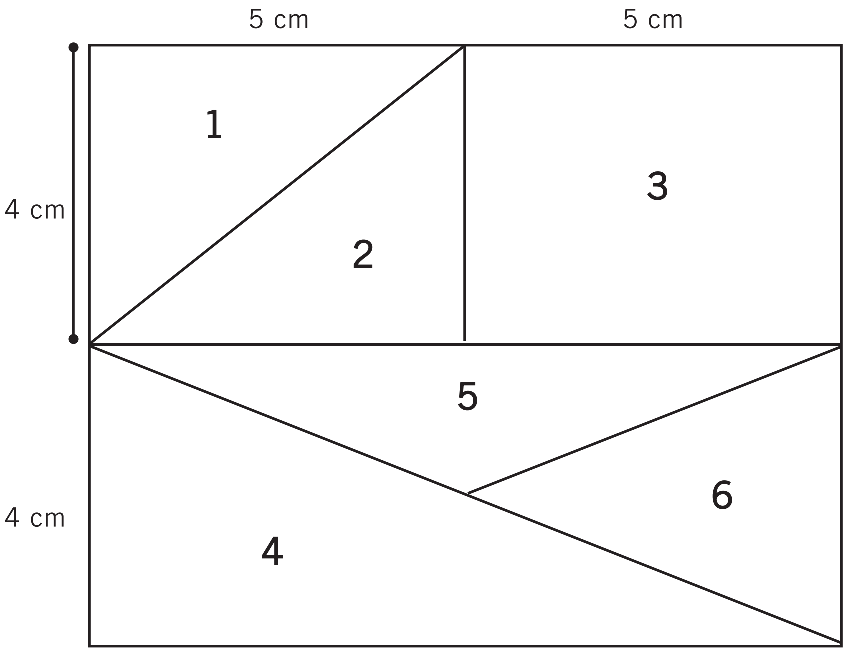
a) Completar la tabla:

Cantidad de harina (en kilogramos)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	....
Cantidad de agua (en litros)	$\frac{2}{3}$	....	....	....	2

b) Si se usa 1 kilo y medio de harina, ¿cuánta agua se necesitará?

Problema 7

Organización de la clase: Los alumnos trabajan en grupos. Cada equipo recibe un sobre con las piezas de un rompecabezas recortadas y numeradas. Una representación del rompecabezas original queda en el escritorio del docente o en el pizarrón. El esquema muestra las figuras que forman el rompecabezas con sus medidas:



a) El docente pedirá a cada grupo que modifique el rompecabezas de manera tal que lo que mide 4 cm pase a medir 7 cm.

b) Se hace el mismo pedido, pero ahora se quiere un modelo más pequeño, donde lo que mide 5 cm (o 5 unidades) pase a medir 3 cm.

Problema 8

a) Completen la siguiente tabla con los procedimientos que prefieran, sabiendo que expresa una proporción directa.

x	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{8}{9}$	......	......
y	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{9}$	......	......	$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$

b) Escriban una fórmula que permita determinar el valor de una variable en función de la otra.

G.C.B.A.

Problema 9

a) Decir si es V o F, para cualquier número *b* racional.

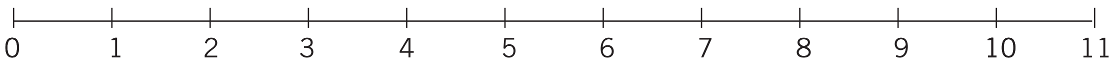
- 20% de $b = \frac{1}{5}$ de b
- $\frac{1}{5} \,.\, b = 0{,}5 \,.\, b$
- $\frac{b}{5} = \frac{20}{100} b = 0{,}2b$
- 125% $b = \frac{5}{4} b$

b) Decir cuál es la respuesta correcta:
Si de un valor *b* se descuenta el 30%, se obtiene: ¿$\frac{2}{3} b$ ó $\frac{7}{10} b$?

Capítulo 2

Problema 1

Un robot A se desplaza dando pasos sobre una recta como la siguiente:



Los pasos del robot son todos de la misma longitud y el robot da dos pasos para ir del 0 al 3.

a) Si el robot se para en el 6 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

b) Identificá 5 puntos de la recta donde pararía el robot, que no sean los que aparecen marcados con los números naturales, y asignale un número a cada uno de esos 5 puntos.

Otro robot, llamado B, da pasos de distinta longitud que el robot A. Este nuevo robot, con dos pasos, va del 0 al 1.

c) Si el robot está parado en el 3 y da un solo paso hacia la derecha, ¿qué número le asignarías al punto en el que se detiene?

d) Si se colocan los dos robots en el 15 y comienzan a caminar hacia la derecha, ¿hay algún punto del trayecto en el que pisan los dos robots?

e) ¿Cuál es la relación entre los pasos de los dos robots?

Problema 2

Se conocen ahora los datos de cinco robots más, C, D, E, F y G, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, de la siguiente manera:

C llega al	5 en	3 pasos
D llega al	5 en	9 pasos
E llega al	14 en	9 pasos
F llega al	10 en	6 pasos
G llega al	23 en	11 pasos

a) Ordená por tamaño, de menor a mayor, los pasos de los cinco robots. Explicá, con tus palabras, cómo hiciste para compararlos.

b) ¿Cuánto miden los pasos de cada robot? Ordená de menor a mayor los números que obtuviste.

Problema 3

Tenemos cinco robots llamados H, I, J, K, L, los cuales avanzan del 0 hacia la derecha, con pasos de la misma longitud, de la siguiente manera:

H llega al	8 en	3 pasos
I llega al	12 en	15 pasos
J llega al	4 en	2 pasos
K llega al	8 en	10 pasos
L llega al	18 en	9 pasos

Ordená de menor a mayor los robots, según la longitud de sus pasos. Explicá, con tus palabras, cómo comparaste cada número con los otros.

Problema 4

Cuatro chicos midieron el largo del pizarrón de su aula y llegaron a las siguientes conclusiones:

> Adriana midió con un cordón, y le dio 6 cordones.
> Sergio midió con su carpeta, y le dio 10 "largos de carpeta".
> Javier midió con la regla, y le dio 250 cm.
> Federico midió con su pulgar, y le dio 50 pulgares.

Suponiendo que los cuatro chicos midieron bien el pizarrón y que, entonces, todas sus mediciones son iguales, respondé las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la unidad de longitud que tomó cada chico?

b) ¿Cuánto mide el largo de la carpeta de Sergio, si la unidad es el pulgar de Federico?

c) ¿Cuánto mide el pulgar de Federico, si la unidad es el cordón de Adriana?

d) ¿Cuánto mide el cordón de Adriana, si la unidad es el largo de la carpeta de Sergio?

Problema 5

Julia tiene una tablita de madera y dice que cabe una cantidad justa de veces en el cordón de Adriana, y otra cantidad justa de veces en el largo de la carpeta de Sergio. ¿Cuánto puede medir la tablita de madera de Julia?

Capítulo 3

Problema 1

¿Cuántas fracciones hay entre 17 y 18? ¿Cuántas fracciones con denominador 5 hay entre 17 y 18? ¿Y con denominador 9? ¿Y con denominador 21?

Problema 2

¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$?
¿Cuántas fracciones hay entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{4}{9}$ que tengan denominador 9?
¿Y que tengan denominador 18?
¿Y que tengan denominador 10?

Problema 3

¿Cuántas fracciones, cuyo denominador es una potencia de 10, hay entre $\frac{72}{100}$ y $\frac{73}{100}$? ¿Y con denominador 10? ¿Y con denominador 100?

Problema 4

a) Encontrar dos fracciones que estén entre $\frac{1}{7}$ y $\frac{1}{5}$.

b) Encontrar una fracción con denominador 20.

c) ¿Hay más de una fracción? ¿Cuántas?

Problema 5

¿Es verdad que $\frac{667}{1.000}$ es la primera fracción después de $\frac{2}{3}$?

Problema 6

Primera parte

Encontrar una fracción mayor que $\frac{3}{8}$ y menor que $\frac{13}{20}$:

a) con denominador 5,
b) con numerador 9,
c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Segunda parte

Encontrar una fracción equivalente a $\frac{3}{8}$:
a) con denominador 5,
b) con numerador 9,
c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Tercera parte

Encontrar una fracción positiva y menor que $\frac{3}{8}$:
a) con denominador 5,
b) con numerador 9,
c) con denominador igual a una potencia cualquiera de diez.

Problema 7

1. Encontrar, si es posible, un número decimal a, de manera que el número a + *0,00001* tenga *la misma* cantidad de cifras decimales no nulas que a.

2. Encontrar, si es posible, un número decimal a, de manera que el número a + *0,00001* tenga *mayor* cantidad de cifras decimales no nulas que a.

3. Encontrar, si es posible, un número decimal a de cinco cifras decimales no nulas, de manera que el número a + *0,00001* tenga *mayor* cantidad de cifras decimales no nulas que a.

4. Encontrar, si es posible, un número decimal a, de manera que el número a + *0,00001* tenga *menor* cantidad de cifras decimales no nulas que a.

5. Encontrar, si es posible, un número decimal a, de manera que el número a + *0,00001* tenga *exactamente dos cifras* decimales no nulas.

6. Encontrar, si es posible, un número decimal a, de manera que el número a + *0,00001* sea entero.

Problema 8

1. Encontrar, si es posible, un número decimal entre $\frac{21}{40}$ y $\frac{22}{40}$.

2. Encontrar, si es posible, un número decimal entre $\frac{21}{41}$ y $\frac{21}{40}$.

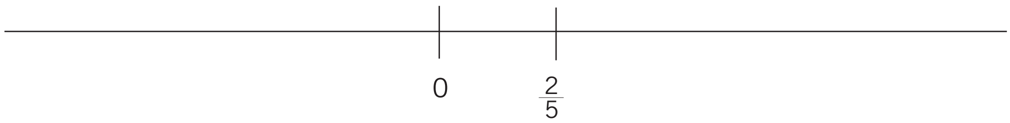
3. Encontrar, si es posible, dos números fraccionarios, de manera que entre ellos no haya ningún número con dos cifras decimales no nulas.

4. Encontrar, si es posible, dos números decimales, de manera que entre ellos no haya ningún número fraccionario de denominador 7.

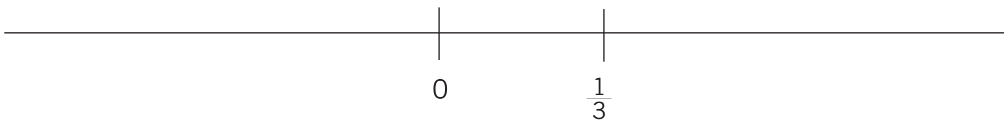
Problema 9

a)

Ubicá -1 en la recta que sigue:

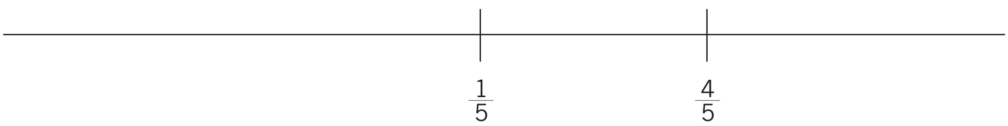


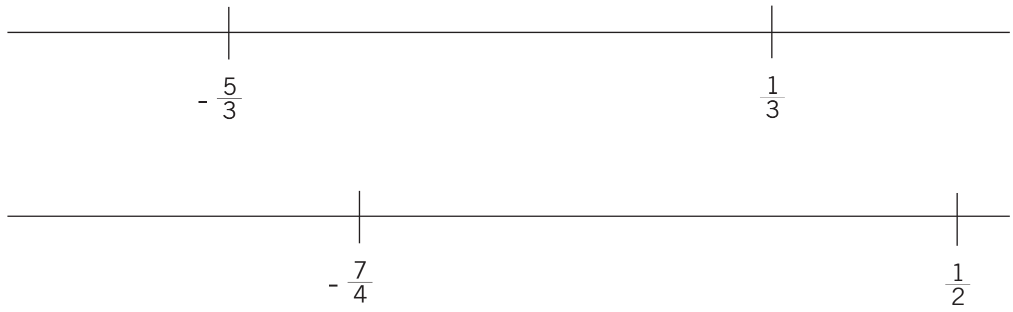
Ubicá $\frac{3}{4}$ en la recta que sigue:



b)

Ubicá el 0 en las siguientes rectas:





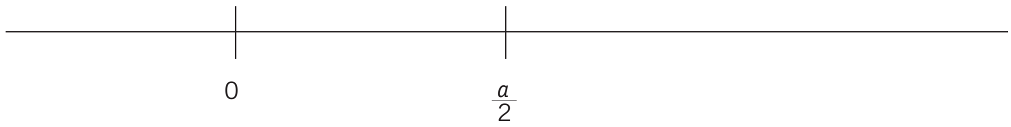
PROBLEMA 10

a) ¿Es posible hallar un número entero que se encuentre entre $-\frac{6}{5}$ y $-\frac{1}{2}$? ¿Cuántos hay?

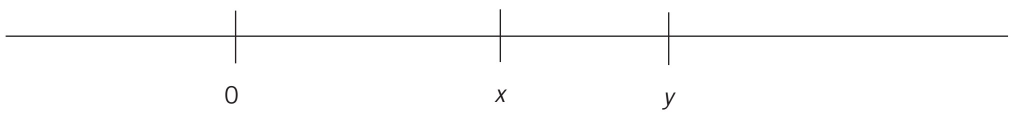
b) ¿Es posible hallar un racional con denominador 4 que se encuentre entre $-\frac{6}{5}$ y $-\frac{1}{2}$? ¿Es el único? ¿Y con denominador 7?

PROBLEMA 11

a) Supongamos que a es un número cualquiera: en la siguiente recta se ubicó $\frac{a}{2}$. ¿Dónde ubicarías a ; $-a$ y $\frac{a}{3}$?



b) A partir de los datos que se dan en el dibujo de la recta, ubicar, cuando sea posible, $\frac{x}{2}$; $\frac{y}{3}$; $2 \,.\, x$; $-y$; $y + 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{3}$.



Capítulo 4

Problema 1

En un terreno cuadrado se quiere construir una escuela rectangular, cuyo largo son las tres cuartas partes del largo del terreno y el ancho, dos quintos del ancho del mismo.
¿Qué parte del terreno ocupará la escuela?

Problema 2

a) Se quiere que la escuela siga teniendo forma rectangular y ocupe la misma área, pero que uno de sus lados sea la mitad del lado del terreno. ¿Qué parte del lado del terreno es el otro lado?

b) Y si un lado fuera $\frac{6}{7}$, ¿cuál sería el otro lado?

Problema 3

Y si el área ocupada por la escuela es $\frac{1}{5}$ de la del terreno, ¿qué parte del ancho y del largo del terreno podrían ser el largo y el ancho de la escuela?

Problema 4

¿Por qué número hay que multiplicar a 4 para obtener por resultado 7? ¿Cuántos números hay que cumplan esta condición?

Problema 5

a) Encontrar algún valor para el número a, de modo tal que se verifique la siguiente igualdad: $\frac{3}{4} \cdot a = 1$

b) Encontrar algún valor para el número a, de modo tal que se verifique la siguiente igualdad: $\frac{3}{7} \cdot a + 6 = 11$

Problema 6

Encontrar una multiplicación que tenga $\frac{2}{5}$ como uno de sus factores y que dé por resultado $\frac{7}{36}$.

Problema 7

a) Encontrar diez multiplicaciones diferentes que den por resultado 5.
¿Cuántas multiplicaciones posibles hay?

b) Buscar números racionales *a* y *b* tal que su producto dé $\frac{7}{10}$.

Problema 8

a) El área de un rectángulo es 3, y la base mide 5, ¿cuánto debe medir la altura?
Se arman ahora otros rectángulos, de modo que sus bases son aquéllas que resultan de dividir por 2, por 3, por 4... etcétera. La base del primer rectángulo y la altura son tales que el área de los rectángulos que se obtienen es siempre 3.
b) Completar las 7 primeras filas de la tabla.
c) ¿Cuál es la altura del rectángulo número 35 de la serie? ¿Y la del número 100?
d) Decidir si los siguientes racionales pueden ser base de algún rectángulo de la tabla:

Base	Altura	Área
5	....	3
$\frac{5}{2}$	....	3
$\frac{5}{3}$	....	3
....	....	3
....	....	3

Para los que puedan serlo, calcular la altura.

$$\frac{10}{40} \qquad \frac{10}{33} \qquad \frac{35}{91} \qquad \frac{127}{139}$$

e) Escribir la fórmula que permita encontrar la altura de estos rectángulos, en función de su base.

f) Escribir la fórmula que permite calcular el área de cualquier rectángulo de esta serie en función de su base.

Problema 9

a) Encontrar un número a, tal que $a \cdot \frac{5}{3} = 1$. ¿Cuántos hay?

b) Encontrar un número a tal que $a \cdot \frac{5}{3} < 1$. ¿Cuántos hay?

c) Buscar todos los números racionales a que multiplicados por $\frac{5}{3}$ den un número comprendido entre 0 y 1. ¿Cuántas posibilidades hay en este caso?

d) Buscar todos los números racionales a que multiplicados por $\frac{5}{3}$ den un número comprendido entre 1 y 2. ¿Cuántas posibilidades hay en este caso?

Problema 10

A continuación, se presentan desigualdades en las que la letra a representa un número racional cualquiera.

- Si te parece que la desigualdad es siempre verdadera, da una justificación.
- Si te parece que la desigualdad es siempre falsa, da una justificación.
- Si pensás que a veces es V y a veces F, da ejemplos para cada caso.

a) $4 \cdot a > 4$
b) $4 \cdot a > a$
c) $4 \cdot a^2 > a^2$

Capítulo 5

Problema 1

a) Se quiere comparar la fracción $\frac{18}{7}$ con las fracciones de la forma $\frac{9}{n}$, para n un número natural. ¿Para qué valores de n natural se verifica que $\frac{18}{7} > \frac{9}{n}$?

b) Se quiere comparar la fracción $-\frac{21}{4}$ con las fracciones de la forma $\frac{n}{5}$, para n un número negativo. ¿Para qué valores de n negativo se verifica que $-\frac{21}{4} < \frac{n}{5}$?

Problema 2

En lo que sigue, n es un número cualquiera negativo.

a) Encontrar, si es posible, valores de n para que $\frac{n}{2} < \frac{3n}{4}$.

b) ¿Será cierto que $\frac{3}{2n} > \frac{2}{n}$, para todo n negativo?

Problema 3

Se trata ahora de comparar las siguientes fracciones, para distintos valores de n positivos: $\frac{20}{4n+3}$ y $\frac{5}{n}$.

Ensayen con algunos ejemplos, establezcan una conjetura e intenten demostrarla.

Problema 4

Se propone una charla para presentar la situación a los alumnos antes de la formulación de la pregunta que ellos deberán estudiar.
Vamos a estudiar qué pasa con la fracción $\frac{7}{5}$ cuando se suma un número natural al numerador, y se resta ese mismo número al denominador. Por ejemplo, si sumamos y restamos 1, $\frac{7+1}{5-1}$, se obtiene el número 2. Prueben con otros números naturales, salvo el 5 (¿por qué?) ¿Será cierto que $\frac{7+n}{5-n}$ es siempre un número entero, para cualquier valor natural de $n = 5$?

Problema 5

Con tres números naturales consecutivos se construyen dos fracciones y se las compara. Por ejemplo, con 3, 4 y 5, se obtiene $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Prueben con otros números consecutivos. ¿Se obtiene siempre la misma desigualdad?

¿Será posible enunciar una ley general para tres números naturales consecutivos cualesquiera?
¿Pueden probar esta ley que enuncian?

Problema 6

Con cuatro números naturales consecutivos se construyen dos fracciones de la siguiente manera:

- La primera fracción tiene por numerador al primero de los cuatro números y como denominador al tercero.
- La segunda fracción tiene como numerador al segundo de los cuatro números y como denominador al cuarto.

Por ejemplo, si los cuatro números consecutivos son 2, 3, 4 y 5, las fracciones que se construyen son $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{5}$. Si las comparamos, resulta $\frac{2}{4} < \frac{3}{5}$.
Si se prueba con otros cuatro números consecutivos, ¿resultará siempre la segunda fracción mayor que la primera?

Problema 7

Si ahora se consideran cuatro números naturales a, b, c y d con $a < b < c < d$, pero no necesariamente consecutivos los cuatro, ¿seguirá siendo válido que $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$?

PROBLEMA 8

a) ¿Será cierto que $\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \geq 2$ para cualquier valor de n?

b) ¿Valdrá la desigualdad anterior para cualquier valor de n, si cambiamos el 2 por el 5?

c) ¿Será cierto que $\frac{n}{5} + \frac{5}{n} \geq 2$ para cualquier valor de n?

d) ¿Será cierto que $a + \frac{1}{a} \geq 2$ para cualquier valor de a racional positivo?