EL NIÑO LAS MATEMÁTICAS Y LA REALIDAD

PROBLEMAS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA PRIMARIA

G. Vergnaud

TRILLAS EDITORIAL

ÍNDICE

LOS PROBLEMAS DE TIPO MULTIPLICATIVO

Se pueden distinguir dos grandes categorías de relaciones multiplicativas –definimos así las relaciones que comportan una multiplicación o una división. La más importante de ellas, que se utiliza para la introducción de la multiplicación en la escuela primaria y que forma la trama de la gran mayoría de los problemas de tipo multiplicativo, es una relación cuaternaria y no una relación ternaria; por ello no está bien representada en la escritura habitual de la multiplicación: $a \times b = c$, ya que dicha escritura no comporta más que tres términos. Estamos pues obligados, en este capítulo, a reexaminar completamente la noción de multiplicación.

Isomorfismo de las medidas

La primera gran forma de relación multiplicativa es una relación cuaternaria entre cuatro cantidades; dos cantidades son medidas de un cierto tipo, y el resto son medidas de otro tipo. Algunos ejemplos son:

Ejemplo 1

“Tengo 3 paquetes de yogur. Hay 4 yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo?”

Ejemplo 2

“Mi mamá quiere comprar una tela que cuesta 24.80 francos el metro para hacerse un traje sastre. Necesita 3.50 metros de tela. ¿Cuánto deberá pagar?

Ejemplo 3

“Pagué 12 francos por 3 botellas de vino. ¿Cuál es el precio de una botella?”

Ejemplo 4

“Pedro tiene 12 francos y quiere comprar algunos paquetes de caramelos que cuestan 4 francos cada paquete. ¿Cuántos paquetes puede comprar?”

Ejemplo 5

“Una carrera de autos cubre un trayecto de 247 760 kilómetros. Un auto consume 6.785 litros cada 100 kilómetros. ¿Cuánto consumirá dicho auto durante la carrera?

Ejemplo 6

“Compro 12 botellas de vino. Cada paquete de tres cuesta 19.50 francos. ¿Cuánto debo pagar?

Ejemplo 7

“3 madejas de lana pesan 200 gramos, Se necesitan 8 para hacer un jersey. ¿Cuánto pesa el jersey?”

Estos ejemplos son de diferentes grados de dificultad, por razones que analizaremos más adelante; pero todos pueden ser representados por un esquema análogo, que no presenta ningún tipo de dificultad para los niños y que muestra muy claramente que son cuatro las cantidades puestas en relación: x designa la cantidad buscada.

Ejemplo 1

paquetes	yogures
1	4
3	x

Ejemplo 2

metros	francos
1	24.80
3.50	x

Ejemplo 3

botellas	francos
1	x
3	12

Ejemplo 4

paquetes	francos
1	4
x	12

Ejemplo 5

Ejemplo 6

Ejemplo 7

kilómetros	litros
100 →	6.785
247760 →	x

botellas	francos
3 →	19.50
12 →	x

madejas	gramos
3 →	200
8 →	x

El esquema utilizado en todos los ejemplos no es otra cosa que la tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades (los paquetes de yogur y los yogures, los metros de tela y el precio pagado, etc.). Dicho esquema aísla cuatro cantidades particulares en un cuadro más completo que representaría esta correspondencia; así, en el ejemplo 1 sólo se retienen del siguiente cuadro completo las cuatro cantidades señaladas.

Paquetes	*Yogures*
$\boxed{1}$ →	$\boxed{4}$
2 →	8
$\boxed{3}$ →	$\boxed{12}$
4 →	16
5 →	20
6 →	24
etc.	

Esta tabla de correspondencia traduce el isomorfismo de los dos tipos de medida (número de paquetes y número de yogures). Más adelante precisaré en qué consiste ese isomorfismo.

En los ejemplos que preceden se encuentran problemas que se resuelven en principio (haciendo caso omiso de los procedimientos no canónicos que se pueden utilizar en ciertos casos):

– por una multiplicación (ejemplos 1 y 2);
– por una división (ejemplos 3 y 4);
– por una regla de tres (ejemplos 5, 6 y 7).

Pero la dificultad respectiva de los ejemplos 1 y 2, de los ejemplos 3 y 4, y de los ejemplos 5, 6 y 7, no es la misma.

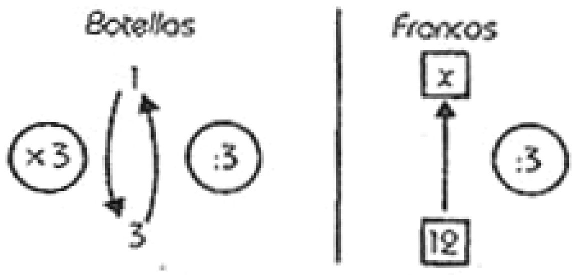
En el ejemplo 1 y en el ejemplo 2 encontramos la diferencia entre números enteros y números decimales, entre magnitudes discretas y magnitudes continuas. No vamos a detenernos en eso, pero es evidente que la introducción de la multiplicación como adición reiterada (3 paquetes de 4 yogures, es 4 yogures más 4 yogures más 4 yogures) resulta más cómoda con magnitudes discretas y números enteros. Son necesarias explicaciones adicionales para hacer comprender al niño que el precio de 3.50 metros es el precio de un metro, más el precio de un metro, más el precio de 0.50 metros; y que da lo mismo multiplicar el precio de 1 metro por 3.50.

Entre el ejemplo 3 y el ejemplo 4, la diferencia es de otra naturaleza: en el ejemplo 3 hay que buscar el valor unitario, conociendo el vínculo de correspondencia entre dos magnitudes de naturaleza diferente; en el ejemplo 4, el valor unitario está dado y es necesario buscar el número de unidades del primer tipo, correspondiente a una magnitud dada del segundo tipo.

Aunque la operación que permite resolver los problemas es en los dos casos una división, no intervienen las mismas nociones, como lo muestran los esquemas siguientes.

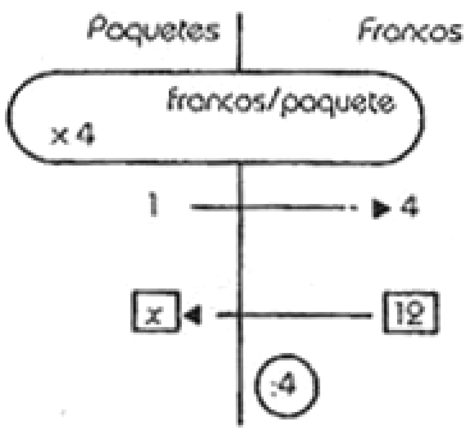
En el ejemplo 3 se dividen 12 francos entre 3 para encontrar x francos, tal como lo representa la relación vertical de abajo hacia arriba. El operador :3 es un operador sin dimensión (un escalar, como veremos más adelante), que no hace más que reproducir en la columna de la derecha lo que ocurre en la columna de la izquierda, y que expresa el pasaje de 3 botellas a 1 botella. El operador :3 es de esta manera el operador inverso del operador x3 que hace pasar de 1 botella a 3 botellas.

Ejemplo 3



En el ejemplo 4 se dividen 12 francos entre 4 para encontrar x paquetes, como lo representa la relación horizontal de derecha a izquierda. La operación :4 es una función inversa de la función directa $\boxed{\text{x 4 francos/paquetes}}$, que hace pasar, en la línea de arriba, de un paquete al precio de un paquete, es decir, de la unidad al valor unitario.

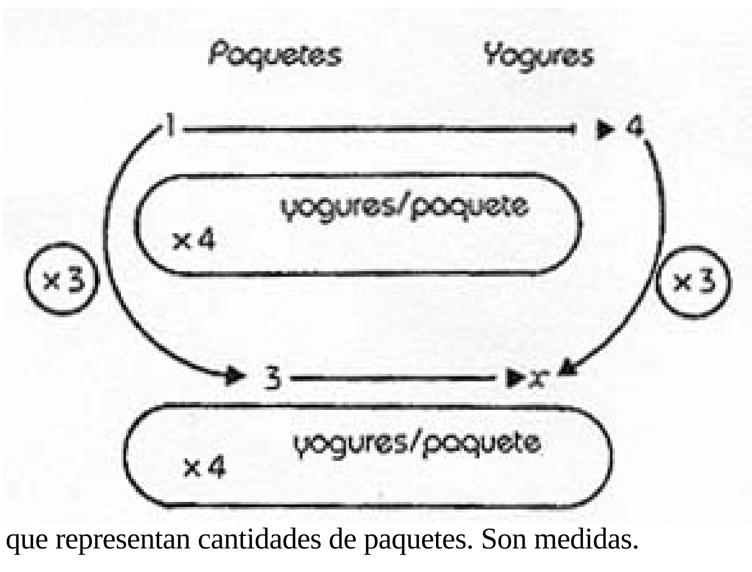
Ejemplo 4



Las dos divisiones de los ejemplos 3 y 4 no hacen pues intervenir los mismos cálculos relacionales; y la última es, por otra parte, más delicada que la primera.

Análisis detallado de un ejemplo simple[1]

El análisis que precede vale por una multiplicación simple: retomemos el ejemplo 1 y analicemos detalladamente el conjunto de las relaciones presentes.



1 y 3 son números que representan cantidades de paquetes. Son medidas.

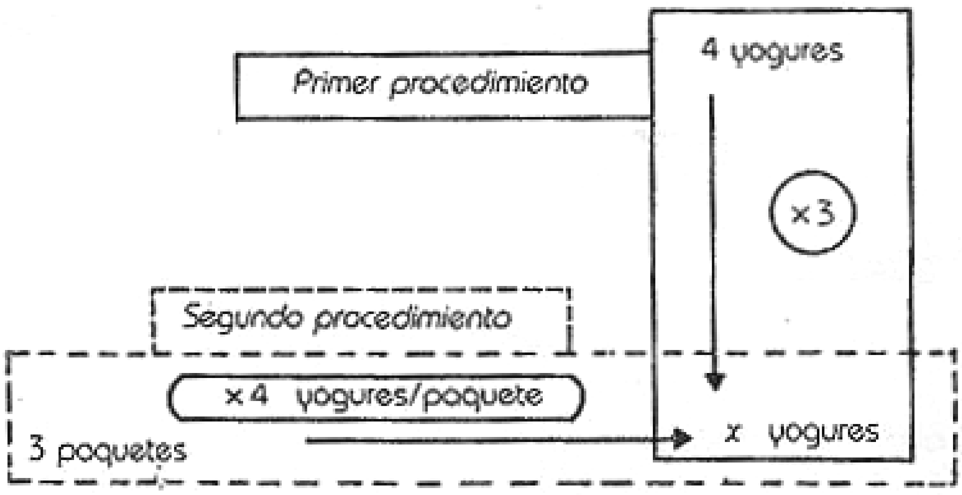
[1] Este análisis y todos los que aparecen en el capítulo están destinados, por supuesto, a los maestros, no a los niños.

4 y x son números que representan cantidades de yogures. También son medidas, pero de otra naturaleza. Los operadores verticales x3 son operadores sin dimensión, o escalares, que hacen pasar de una línea a otra en la misma categoría de medidas.

Los operadores horizontales x4 representan funciones y expresan el pasaje de una categoría de medidas a la otra, de ahí la utilización de una forma verbal que expresa una relación:

yogur por paquete-yogur/paquete

Existen de hecho dos procedimientos para encontrar x. El primero consiste en aplicar el operador sin dimensión x3 a la cantidad 4 yogures. El segundo en aplicar la función X4 yogur/paquete a la cantidad de 3 paquetes.



Los dos procedimientos son, por supuesto, equivalentes, pero distintos; el ejemplo visto antes de los dos tipos de división muestra que no se les debe confundir.

En todo caso, sólo este análisis permite comprender que haciendo 4 x 3 (o 3 x 4) no se multiplican yogures por paquetes, o paquetes por yogures (¿por qué se obtendrían entonces yogures y no paquetes?).

Por otra parte, se puede verificar lo bien fundado del análisis precedente utilizando otro análisis, el de la relación cuaternaria en sí. En efecto, esta relación puede formularse de dos maneras:

- *Primera formulación*

  x yogures son a 4 yogures lo que 3 paquetes son a un paquete.

- *Segunda formulación*

  x yogures son a 3 paquetes lo que 4 yogures son a 1 paquete.

Escribamos esto bajo la forma de proporciones y transformemos las ecuaciones así encontradas. Son “ecuaciones de dimensiones”.

- *Primera formulación*

$$\frac{x \text{ yogures}}{4 \text{ yogures}} = \frac{3 \text{ paquetes}}{1 \text{ paquete}}$$

Multipliquemos los dos términos por “4 yogures”

3 paquetes x “4 yogures”

$$x \text{ yogures} = \frac{\phantom{3 \text{ paquetes x 4 yogures}}}{1 \text{ paquete}}$$

Se observa así una forma simplificada (denominador igual a 1) de la regla de tres, que muestra que la multiplicación en juego no es una ley de composición binaria, sino una relación más compleja.

Simplifiquemos las dimensiones del segundo término:

$$\text{x yogures} = \frac{3 \text{ paquetes x 4 yogures}}{1 \text{ paquete}} = \frac{3 \text{ x 4 yogures}}{1}$$

y suprimimos el denominador (igual a 1):

$$x \text{ yogures} = 3 \text{ x 4 yogures}$$

Reaparece así el primer procedimiento utilizado para encontrar *x.*

- *Segunda formulación*

$$\frac{x \text{ yogures}}{3 \text{ paquetes}} = \frac{4 \text{ yogures}}{1 \text{ paquete}}$$

Multipliquemos los dos términos de la ecuación por “3 paquetes”:

$$\text{x yogures} = 3 \text{ paquetes x } \frac{4 \text{ yogures}}{1 \text{ paquete}} =$$

$$= 3 \text{ paquetes x } 4 \frac{\text{yogures}}{\text{paquete}}$$

Esta forma intermedia permite encontrar el segundo procedimiento utilizable para calcular x, aunque la operación puede, evidentemente, ser transformada de manera análoga a como se ha hecho anteriormente.

$$\text{x yogures} = \frac{\cancel{3 \text{ paquetes}} \text{ x 4 yogures}}{\cancel{1 \text{ paquete}}}$$

$$\text{x yogures} = 3 \text{ x 4 yogures}$$

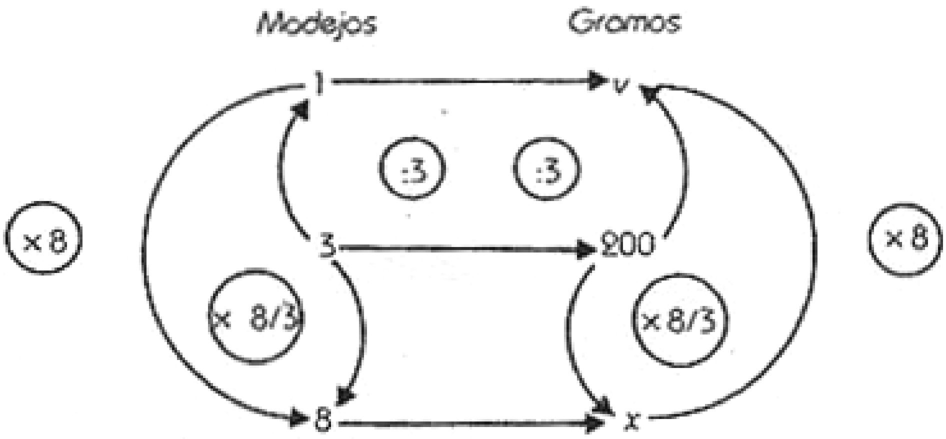
Este último análisis es muy conocido en física con el nombre de *análisis dimensional.* Es casi imposible practicarlo tal cual con los niños en la enseñanza elemental, dado que la noción de proporción está en el límite de la capacidad de los mejores alumnos al final de la escuela primaria. Pero digamos que este análisis permite dilucidar completamente las relaciones que intervienen en una multiplicación, y mostrar así que la multiplicación más elemental hace intervenir, de hecho, un cálculo relacional referido a cuatro cantidades y varios tipos de operaciones.

Los ejemplos 5, 6 y 7 constituyen ilustraciones más complejas de la misma relación cuaternaria.

Se puede ver, en efecto, que en estos ejemplos se encuentra el mismo esquema fundamental de correspondencia que el observador en los cuatro primeros; pero la novedad es que ninguna de las cuatro cantidades es la unidad y que la regla de tres en la que se desemboca esta vez es una regla de tres no trivial (denominador diferente de 1). Sin embargo, esto no quiere decir que cada uno de los ejemplos 5, 6 y 7 presente dificultades idénticas: la regla de tres teórica en la que se desemboca plantea, en efecto, dificultades distintas y desiguales, según que el denominador sea igual a 100 (ejemplo 5); que el pasaje de una línea a la otra pueda hacerse por un operador multiplicativo simple no fraccionario (ejemplo 6), o que la regla de tres sea irreductible (ejemplo 7).

Analicemos este último ejemplo e intentemos diferenciar todas las nociones presentes; lo que significa, de ningún modo, que el niño debe haberlas adquirido todas para resolver el problema.

Análisis vertical (escalar)



Este análisis vertical se centra en la noción de operador-escalar (sin dimensión), que hace pasar de una línea a otra en una misma categoría de medidas.

- *Primera etapa* De la misma manera que se pasa de 3 madejas a 1 madeja (dividiendo entre 3), se pasa del peso de 3 madejas (200) al peso de una madeja (v, valor unitario).
- *Segunda etapa* De la misma manera que se pasa de una madeja a 8 madejas (multiplicando por ocho), se pasa del paso de una madeja (v) al peso de 8 madejas (x).
- *Síntesis* Se puede decir así que se pasa directamente de 3 madejas a 8 madejas, multiplicando por el operador fraccionario $\boxed{X8/3}$, que no es otra cosa que la aplicación sucesiva de dos operadores :3 y X8. El mismo operador fraccionario hace pasar también del peso de 3 madejas (200) al peso de 8 madejas (x).

La noción de fracción es introducida aquí a partir de la noción de operador, y corresponde a la composición de dos operadores multiplicativos simples, una división y una multiplicación. El operador fraccionario obtenido en este ejemplo es una fracción compleja, pero hay casos en los que el operador resultante de la composición es un operador simple: es el caso del ejemplo 6, donde la composición de :3 y x12 da el operador simple x4

Los operadores multiplicativos pueden componerse entre ellos, como lo muestran los ejemplos siguientes:

×4 ×3 = ×12

La aplicación del operador ×12 es equivalente a la aplicación sucesiva de los operadores ×4 y ×3.

×4 :2 = ×2

:4 :5 = :20

×2/3 ×3 = ×2

×2/3 ×5/4 = ×5/6

Ejemplos complejos que no conciernen a la enseñanza elemental.

Se sabe[2] que esta composición de operadores multiplicativos es, como la composición de transformaciones aditivas, una ley de grupo conmutativo (conmutatividad, asociatividad, elemento neutro,

x8 :3

[2] El adulto que conoce las matemáticas, no el niño.

inverso). La conmutatividad permite invertir el orden de aplicación de los operadores elementales y efectuar, por ejemplo, la multiplicación antes que la división. . ,

El *operador fraccionario* x8/3 *representa pues de manera sintética la aplicación sucesiva de dos operadores multiplicativos* (*una división* :3 *y una multiplicación* x8 *) comenzando ya sea por la división o por la multiplicación.*

Se puede considerar también que el operador fraccionario representa la multiplicación por la razón:

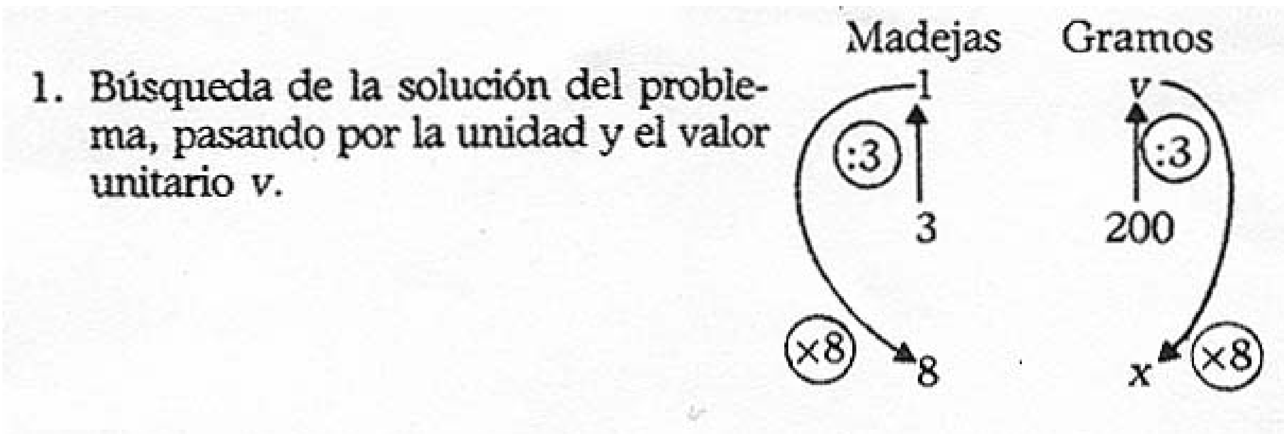
$$\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}}$$

O incluso, que el problema hace intervenir una proporción (igualdad de dos razones).

$$\frac{\text{8 madejas}}{\text{3 madejas}} = \frac{\text{peso de 8 madejas}}{\text{peso de 3 madejas}} = \frac{x \text{ gramos}}{\text{200 gramos}}$$

La noción de razón, la de razón-operador y la de proporción son difíciles, la mayoría de los niños de 9 y 10 años no las comprenden. No hay que concluir, sin embargo, que el maestro no deba introducir situaciones y explicaciones que impliquen estas nociones; pero debe hacerlo prudentemente, deteniéndose en cada etapa y apoyándose al máximo en las nociones más evidentes para el niño, como la de operador.

El cuadro siguiente resume en forma esquemática los diferentes análisis que estimamos necesario elucidar para el maestro que quiere comprender el desarrollo de las nociones que intervienen en el isomorfismo de las medidas y en los problemas que derivan de esta estructura. Estas “etapas” se desarrollan a través de un largo periodo en el curso de los dos últimos años de la enseñanza elemental, y hasta el segundo y tercer años de secundaria.[3] No hay pues que extrañarse de las dificultades encontradas al final de la primaria con las nociones de fracción, razón y proporción.

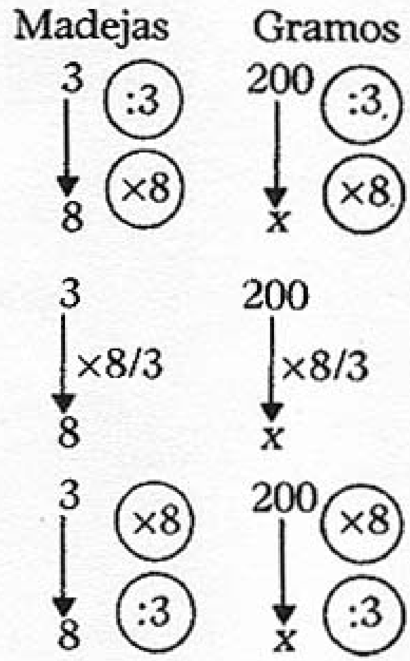


[3] N. del E. La escuela primaria francesa comprende cinco grados solamente.

2. Aplicación sucesiva de dos operadores (división primero).

3. Escritura del operador fraccionario (simple convención de escritura en este nivel).

4. Aplicación sucesiva de dos operadores (multiplicación primero, por conmutatividad).



5. Noción de razón, y de razón-operador.

– Razón entre dos cantidades $\dfrac{8 \text{ madejas}}{3 \text{ madejas}}$

– La razón entre dos cantidades se comprende más fácilmente con relaciones menores que 1, por ejemplo ½, 1/3, ¼ .....2/3......3/4

– La noción de porcentaje, que supone la noción de razón, aclara a su vez esta noción, para las relaciones menores que 1.

– Razón operador x 8/3

$$3 \text{ madejas x } \frac{8 \text{ (madejas)}}{3 \text{ (madejas)}} = 8 \text{ madejas}$$

O multiplicación por la razón

$$\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}}$$

6. Proporción o igualdad de razones.

$$\frac{8 \text{ madejas}}{3 \text{ madejas}} = \frac{x \text{ gramos}}{200 \text{ gramos}}$$

7. Igualdad de razones operadores.

$$x \ \frac{8}{3} = x \ \frac{x}{200}$$

8. Regla de tres: análisis de escritura

$$x \text{ gramos} = 200 \text{ gramos} \times \frac{8 \text{ madejas}}{3 \text{ madejas}}$$

$$x \text{ gramos} = \frac{200 \text{ gramos} \times 8 \text{ madejas}}{3 \text{ madejas}}$$

para los números

$$x = 200 \times \frac{8}{3}$$

$$x = \frac{200 \times 8}{3}$$

(simplificamos)

para las dimensiones

$$\text{gramos} = \text{gramos x relación } \frac{\text{madejas}}{\text{madejas}}$$

$$\text{gramos} = \frac{\text{gramos x madejas}}{\text{madejas}}$$

$$\text{gramos} = \frac{\text{gramos x } \cancel{\text{madejas}}}{\cancel{\text{madejas}}}$$

El análisis vertical que acabamos de hacer no es simple. No agota, sin embargo, la cuestión del isomorfismo de medidas, puesto que hay que completarlo con un análisis (horizontal) de la noción de función lineal.

Análisis horizontal (función)

Madejas		*Gramos*
3	$\xrightarrow{f}$	200
8	$\xrightarrow{f}$	x

Este análisis horizontal está centrado en la noción f operador-función que hace pasar de una categoría a la otra.

Primera etapa El operador-función f que hace pasar de 8 madejas a x gramos, es el mismo que el que hace pasar de 3 madejas a 200 gramos.
Segunda etapa Este operador-función no es otra cosa que la multiplicación por la razón.

$$\frac{\text{punto de llegada}}{\text{punto de partida}}$$

Hay, pues, que encontrar dicho operador sobre la línea de arriba, donde es posible:

$$\begin{array}{ccc} \textit{Madejas} & & \textit{Gramos} \\ 3 & \xrightarrow{\times\ 200/3} & 200 \end{array}$$

$$3 \text{ madejas}\left(\times \frac{200 \text{ gramos}}{3 \text{ madejas}}\right) = 200 \text{ gramos}$$

y aplicarla en seguida a 8 madejas para encontrar:

$$x \text{ gramos} = 8 \text{ madejas}\left(\times \frac{200}{3} \text{ gramos/madeja}\right)$$

Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función. Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis de esta correspondencia en términos de función es por su parte mucho más delicado, pues ésta implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones (en este caso gramos/madeja).

La búsqueda de *f*, operador que hace pasar de 3 madejas a 200 gramos, es facilitada por el hecho de descubrir que es también el operador el que hace pasar de 1 madeja al peso de una madeja, y que *f* tiene entonces el mismo valor numérico que el peso unitario que se obtiene aplicando a 200 gramos el operador :3

$$\begin{tikzcd} \textit{Madejas} & \textit{Gramos} \\ 1 \arrow[r, "f"] & v \\ 3 \arrow[u, bend left, ":3"] \arrow[r, "f"] & 200 \arrow[u, bend right, ":3"'] \\ 8 \arrow[r, "f"] & x \end{tikzcd}$$

Abordaremos a continuación la segunda gran forma de relación multiplicativa.

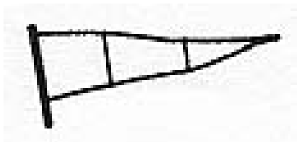
Producto de medida

Esta forma de relación consiste en una relación ternaria entre tres cantidades, de las cuales, una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional.

He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 1 “3 muchachos y 4 muchachas quieren bailar. Cada muchacho quiere bailar con cada muchacha y cada muchacha con cada muchacho. ¿Cuántas parejas posibles hay?

Ejemplo 2 "Se quieren fabricar banderines con tela de dos colores diferentes (rojo y azul). Los banderines han de tener tres franjas, como el que se muestra en la figura siguiente. ¿Cuántos banderines diferentes se pueden fabricar?"



El análisis de este ejemplo mostrará que se trata de un producto de tres cantidades y no de dos (generalización a más de dos dimensiones).

Ejemplo 3 “Una pieza rectangular tiene 4 metros de largo, y 3 metros de ancho. ¿Cuál es su área?”

Ejemplo 4 “Cambiando solamente de jersey o de bufanda, Ana puede tener 15 trajes diferentes. Tiene tres jerseys, ¿cuántas bufandas tiene?

Ejemplo 5 “Una alberca tiene una superficie de 250 metros cuadrados y hacen falta 625 metros cúbicos de agua para llenarla. ¿Cuál es la profundidad media del agua?"

El esquema más natural para representar esta forma de relación es el del cuadro cartesiano, pues de hecho es la noción de producto cartesiano de conjuntos la que explica la estructura del producto de medidas.

Hemos visto en el capítulo sobre las actividades clasificatorias lo que es un producto cartesiano. Utilicemos dicha noción para el análisis de los ejemplos siguientes.

- *Análisis del ejemplo 1*

Designemos por $G = \{a, b, c\}$ el conjunto de los muchachos, y por $F = \{f, g, h, i\}$ el conjunto de las muchachas. El conjunto C de las parejas posibles es el producto cartesiano del conjunto de los muchachos por el conjunto de las muchachas,

$$C = G \times F$$

como lo muestra el siguiente cuadro cartesiano:

		F			
		f	*g*	*h*	*i*
	a	*(a, f)*	*(a,g)*	*(a,h)*	*(a,i)*
G	*b*	*(b,f)*	*(b,g)*	*(b,h)*	*(b,i)*
	c	*(c,f)*	*(c,g)*	*(c,h)*	*(c,i)*

Una pareja consiste en la asociación de un elemento del primer conjunto a un elemento del segundo. El número de parejas es igual al producto del número de muchachos por el número de muchachas.

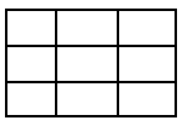
x parejas = 3 muchachos x 4 muchachas

para los números — *para las dimensiones*[4]

$x = 3 \times 4$ — parejas = muchachos x muchachas

- *Análisis del ejemplo 3*

Si descomponemos el rectángulo en cuadrados (líneas y columnas de un metro de ancho) como es habitual hacerlo, se muestra que la medida de la superficie es el producto de la medida de la dimensión grande (longitud) por la medida de la pequeña (anchura), tanto en el plan de las dimensiones como en el plan numérico.



x metros cuadrados = 3 metros x 4 metros

para los números $x = 3 \times 4$ — *para las dimensiones*

metros cuadrados = metros x metros

[4] Que se nos perdone esta escritura abusiva, pero tiene la ventaja de mostrar adecuadamente la relación entre el producto de medida y el producto cartesiano.

La noción de metro cuadrado tiene, pues, dos sentidos complementarios, el de *cuadrado de un metro de lado*, y el de *producto de dos medidas de longitud* (metro x metro). Sólo el segundo sentido permite extender a formas que no se dejan descomponer en cuadrados (triángulos, círculos, etc.) la relación fundamental que acabamos de ver.

longitud x longitud = longitud al cuadrado

Esta relación es la que da un sentido a la escritura simbólica de las unidades de área: m^2, cm^2, km^2, , etcétera.

- *Análisis del ejemplo 4*

Este ejemplo ilustra el hecho de que existe una forma de división propia de esta forma de relación multiplicativa, que no podríamos confundir pura y simplemente con las divisiones que derivan del isomorfismo de las medidas.

Para encontrar el número de bufandas, hay que dividir el número de trajes posibles entre el número de jerseys, según las relaciones siguientes:

15 trajes = 3 Jerseys x *x* bufandas

para los números	para las dimensiones
15 = 3 x *x*	trajes = jerseys x bufandas

Un posible traje no es otra cosa que una pareja (posible jersey, posible bufanda).

- *Análisis del ejemplo 2*

Éste es un ejemplo de producto cartesiano de tres conjuntos. El conjunto de colores posibles para la primera franja, el conjunto de colores posibles para la segunda, el conjunto de colores posibles para la tercera. Si dichos conjuntos fueran distintos (designémoslos por C_I, C_2 y C_3), se tendría como conjunto F de posibles banderines:

$F = C_1 \mathbf{X} C_2 \mathbf{X} C_3$

Como los posibles colores son los mismos para las tres bandas:

C = [rojo, blanco]

se tiene:

$$F = C \mathbf{X} C \mathbf{X} C$$

Y la medida de F es igual al cubo de la medida de C:

x banderines = 2 colores x 2 colores x 2 colores

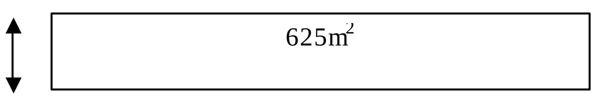
para los números	para las dimensiones
$x = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$	banderines = colores x colores x colores = colores al cubo^3

Un banderín es definido por una terna de colores, el de la primera banda, el de la segunda y el de la tercera, lo que muestra lo bien fundado del análisis anterior. Este ejemplo ilustra la extensión a tres medidas, de la relación producto de medidas. Su generalización no plantea problema.

- *Análisis del ejemplo 5*

Este ejemplo ilustra la noción de volumen y permite apreciar que el volumen es el producto de un área por una longitud. Se puede incluso imaginar una representación plana de ese problema, lo que permite que aparezca el mismo esquema cartesiano utilizado para los ejemplos 1 y 3.

Profundidad promedio del agua



$\longrightarrow$

250 m2
Superficie de la alberca

Pero se puede también utilizar, por supuesto, una representación en perspectiva del volumen de la piscina, sobre todo si se conocen la longitud y el ancho de ésta.

La relación fundamental es evidentemente:

625 metros cúbicos = 250 metros cuadrados x ***x*** metros

para los números	para las dimensiones
625 = 250 x ***x***	metros cúbicos = metros cuadrados x metros
$= \dfrac{625}{250}$	***x*** en metros

Para profundizar el análisis dimensional en este ejemplo, se pueden hacer dos observaciones finales:

1 . El volumen es el producto de un área por una longitud, pero como el área es ella misma el producto de una longitud por una longitud, el volumen es una longitud al cubo, lo que da sentido a la escritura simbólica de las unidades de volumen: m^3, dm^3, cm^3, etcétera.

$$m^3 = m^2 \times m = m \times m \times m$$

2. La posibilidad, ya utilizada a propósito de las proporciones, de simplificar una razón de dimensiones suprimiendo las dimensiones que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, también es utilizable aquí.

625 metros cúbicos = 250 metros cuadrados x *x* metros

$$x \text{ metros} = \frac{625 \text{ metros cúbicos}}{250 \text{ metros cuadrados}}$$

Simplificación:

$$x \text{ metros} = \frac{625\ \cancel{\text{metros}} \times \cancel{\text{metros}} \times \text{metros}}{250\ \cancel{\text{metros}} \times \cancel{\text{metros}}}$$

Se encuentra, en efecto, la misma dimensión de uno y de otro lado del signo de igualdad.

Conclusión sobre la noción de dimensión

Las dos grandes formas de relaciones multiplicativas que acabamos de describir se encuentran relacionadas entre sí; el análisis dimensional permite incluso establecer tal relación de una manera muy simple. En efecto, la utilización de un operador-función para la solución de los problemas de la primera forma (isomorfismo de medidas) permite encontrar la segunda forma (producto de medidas). -

Sea por ejemplo el siguiente problema:

"Un avión vuela durante 6 horas a la velocidad de 650 kilómetros por hora. ¿Qué distancia recorre?

Se trata claramente de una relación de la primera forma (isomorfismo de medidas).

Tiempo en horas		*Distancia en kilómetros*
1	$\longrightarrow$	650
6	$\longrightarrow$	*x*

x650

Pero uno de los procedimientos utilizables consiste en multiplicar la medida 6 horas por el operador-función 650 kilómetros/hora, que puede ser considerado también como una medida de la velocidad:

x km = 6 horas x 650 km/h

Medida de la distancia	=	medida del tiempo	x	medida de la velocidad

$$d = v \times t$$

Esta última operación se liga con la segunda forma de relación (producto de medidas).

Inversamente, se puede analizar el producto de medidas como un doble isomorfismo de medidas (doble proporcionalidad).

Sea por ejemplo el caso del número de parejas: se puede decir que es proporcional a la vez al número de niños (para un número de niñas constante) y al número de niñas (para un número de niños constante).

De la misma manera, el área del rectángulo es proporcional por una parte a la longitud (cuando el ancho permanece constante) o al ancho (cuando la longitud permanece constante).

Se puede incluso considerar que el producto de medidas sólo es bien entendido por los niños cuando lo analizan como una doble proporcionalidad. En todo caso, es esta doble proporcionalidad la que justifica en física la identificación de una dimensión con un producto de dimensiones más simples. Es lo mismo para los conceptos de superficie y volumen.

Existen pues dimensiones simples, dimensiones-producto y dimensiones-cociente, entre las cuales se pueden escribir "ecuaciones de dimensiones"

- longitud, tiempo, peso, costo	son dimensiones simples;
- área, volumen. . .	son dimensiones-producto;
- velocidad, densidad, valor unitario,	son dimensiones-cociente.

Las dimensiones simples pueden ser medidas directamente. Las dimensiones-producto y las dimensiones-cociente son medidas con frecuencia de manera indirecta, por mediación de las dimensiones simples que las componen:

- Área = producto de una longitud por una longitud.
- Velocidad = cociente de una distancia entre un tiempo, etcétera.

Pero también pueden ser medidas directamente:

- Recubrimiento de una superficie por una cuadrícula.
- Contador de velocidad, etcétera.

Ocurre incluso que se mide una dimensión simple en forma indirecta, utilizando otra medida simple y una medida cociente, como en el ejemplo precedente del avión:

Distancia recorrida = tiempo transcurrido x velocidad

Resumiendo, las relaciones multiplicativas se prestan, no sólo a un conjunto de composiciones numéricas (multiplicaciones, divisiones, reglas de tres simples y compuestas, etc.), sino igualmente a composiciones sobre las dimensiones.

Acabamos de ver en este capítulo que las reglas del cálculo dimensional son análogas a las reglas del cálculo numérico concerniente a la multiplicación y a la división. Este análisis, destinado a los maestros, no puede, evidentemente, ser reproducido tal cual para los niños; pero es posible inspirarse en él. Sobre todo, es indispensable para la comprensión de las dificultades encontradas por los niños.

Clases de problemas de tipo multiplicativo

Pueden extraerse numerosas clases de problemas, según la forma de la relación multiplicativa; el carácter discreto o continuo de las cantidades que intervienen; las propiedades de los números utilizados, etcétera.

Nos conformaremos aquí con distinguir las principales clases de problemas.

Isomorfismo de medidas

El isomorfismo de medidas pone en juego cuatro cantidades, pero en los problemas más simples se sabe que una de éstas es igual a uno. Hay entonces tres grandes clases de problemas, según que la incógnita sea alguna de las otras tres cantidades. Ilustramos estas tres clases por medio de esquemas (x representa la incógnita):

Multiplicación

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & a \\ b & \longrightarrow & x \end{array}$$

División: búsqueda del valor unitario

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & x \\ b & \longrightarrow & c \end{array}$$

División: búsqueda de la cantidad de unidades

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & a \\ x & \longrightarrow & c \end{array}$$

Cada una de las tres clases se subdivide en numerosas subclases. Tomemos el caso de la multiplicación; he aquí varios ejemplos que ponen en evidencia dificultades muy diferentes:

Números enteros pequeños

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 3 \\ 2 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Números enteros grandes

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 42 \\ 183 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Valor unitario decimal

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 2.75 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Números decimales

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 6.08 \\ 5.74 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Valor unitario inferior a 1

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 0.25 \\ 7 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Número de unidades inferior a 1

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 6.08 \\ 0.42 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Algunas de estas subclases son todavía difíciles para la mayoría de los niños al final de la escuela primaria, sobre todo las que corresponden a los tres últimos ejemplos.

Se pueden distinguir subclases análogas para cada una de las clases de problemas con división; el lector puede reconstruirlas fácilmente. Cada una de ellas merece una atención particular, y es muy importante ilustrar una misma subclase con ejemplos tomados de diferentes dominios. Es igualmente muy importante lograr que los niños analicen bajo el esquema único de la relación cuaternaria las diferencias entre clases y subclases de problemas.

Caso de un solo espacio de medidas

El análisis en términos de operadores-escalares es fácilmente comprendido por los niños; pero éste implica una distinción entre medida y escalar, que requiere de un estudio profundo. Vamos a ver con un ejemplo cómo se puede suscitar la reflexión de los niños a partir de los 8 o 9 años.

Hacen falta dos metros de tela para hacer una falda. Hacen falta tres veces más para hacer un conjunto. Entonces, hacen falta seis metros para hacer un conjunto.

	Metros	
Falda	2	X3
Conjunto	6	

Este ejemplo ilustra una forma de relación multiplicativa que no hemos visto todavía explícitamente, y que hace intervenir una correspondencia, sin ser, por ello, un isomorfismo de medidas. No hay en este ejemplo más que una categoría de medidas, los metros de tela, y la correspondencia no se establece entre cuatro cantidades sino entre dos, por una parte, y dos objetos, *falda* y *conjunto*, por la otra.

El número 2 representa una medida en metros, igual que el número 6, mientras que el número 3 representa un operador~escalar, designado verbalmente por la palabra “veces”.

Las expresiones lingüísticas “tres veces más”, “tres veces menos”son presentadas inevitablemente en el enunciado de esta forma de relación. Éstas son por supuesto utilizadas en el estudio de los isomorfismos de medidas, sólo cuando se hace explícito el papel de los operadores-escalares:

Se dirá por ejemplo que “tres botellas cuestan *tres veces* más que una botella”

El ejemplo anterior, como todo ejemplo análogo, permite distinguir tres clases de problemas –y particularmente dos tipos de divisiones: búsqueda de una medida y búsqueda de un escalar.

He aquí los tres esquemas posibles:

Multiplicación

Falda	2	
	↓	X3
Conjunto	*x*	

División

Búsqueda de una medida

Falda	x	
	↓	X3
Conjunto	6	

División

Búsqueda de un escalar

Falda	2	
	↓	xx
Conjunto	6	

Y los enunciados correspondientes:

Multiplicación:

“Hacen falta 2 metros de tela para hacer una falda; hacen falta tres veces más para hacer un conjunto. ¿*Cuanta tela* se necesita para hacer un conjunto?

División: búsqueda de una medida.

“Hacen falta tres veces más tela para hacer un conjunto que para una falda. Se necesitan 6 metros para un conjunto. ¿*Cuánta tela* se necesita para hacer una falda?”

División: búsqueda de un escalar.

“Se necesitan 2 metros de tela para una falda, 6 metros para un conjunto. ¿*Cuántas veces más* requiere un conjunto (con respecto a una falda)?

La forma verbal de las preguntas “cuánta tela” y “cuántas veces más” marca la diferencia entre la noción de medida y la de escalar. Estas observaciones serían quizás inútiles si, en la solución de problemas, los niños no fueran llevados con frecuencia a descubrir y a hacer explícitos operadores y no solamente medidas.

Producto de medidas

Veremos, en el capítulo “Representación y solución de problemas complejos” diferentes clases de problemas que hacen intervenir la regla de tres. Para terminar este capítulo, nos conformaremos con recordar que la última gran forma de relación multiplicativa, el producto de medidas, permite distinguir dos clases de problemas:

- *Multiplicación.* Encontrar la medida-producto cuando se conocen las medidas elementales.
- *División.* Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

Todavía aquí, se deben distinguir numerosas subclases, según las propiedades de los números utilizados (enteros, decimales, números grandes, números menores que 1) y según los conceptos a los cuales hacen referencia. Tomemos el caso de la división; he aquí dos ejemplos que ilustran las dificultades específicas de ciertos conceptos:

Producto discreto-discreto

“Un vendedor quiere poner a disposición de los clientes 15 variedades de helados cubiertos de chocolate. Dispone de tres variedades de chocolate. ¿Cuántas variedades de helados debe tener?”

Producto continuo-continuo

Un rectángulo tiene una superficie de 18.66 metros cuadrados y una anchura de 3.23 metros. ¿Cuál es su longitud?"

Producto continuo-continuo y noción de media

"Una alberca tiene un área de 265.4 metros y hacen falta 633.3 metros cúbicos de agua para llenarla. ¿Cuál es la profundidad media del agua?"

El estudio de las relaciones multiplicativas muestra pues que existen varios tipos de multiplicaciones y de divisiones, o más bien, varias clases de problemas, en los cuales, la solución necesita de una multiplicación o de una división. Nosotros nos hemos limitado a los aspectos más importantes.

La distinción de estas diferentes clases y de su análisis se deben abordar cuidadosamente, con el fin de ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas, y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución. No hay que subestimar la dificultad de algunas nociones, como las de razón, proporción, fracción, y función, las cuales requieren de precauciones didácticas importantes, válidas más allá de la enseñanza elemental. Deben abordarse, sin embargo, desde la enseñanza elemental.