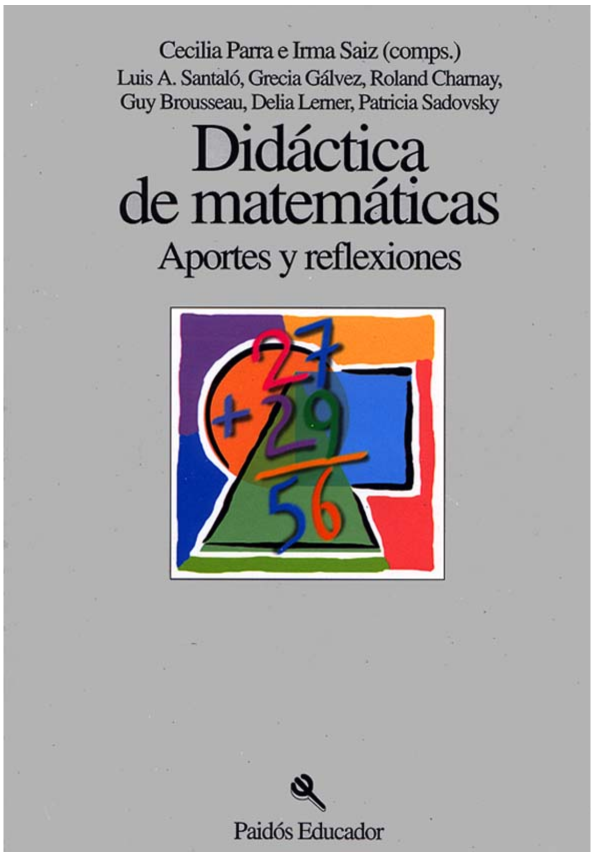
Postítulo “Enseñanza de la Matemática para el nivel primario (EGB1 y EGB2)”

Escuela de Capacitación CePA Centro de Pedagogías de Anticipación

El sistema de numeración: primera parte

Lerner-Sadovsky

En Parra y Saiz (comp): Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones. Buenos Aires. Paidós.



Editorial Paidós Educador

Primera edición, 1994

Quinta reimpresión, 1997
Buenos Aires

ÍNDICE

CAPÍTULO V
EL SISTEMA DE NUMERACIÓN: UN PROBLEMA DIDÁCTICO

Delia Lerner y Patricia Sadovsky,
con la colaboración de Susana Wolman

Donde se expresa nuestro reconocimiento hacia:

–Emilia Ferreiro, porque sus investigaciones pioneras –aunque ya clásicas–sobre el sistema de escritura permitieron vislumbrar la reconstrucción de otros sistemas de representación por parte de los niños.

–Guy Brousseau, porque sus investigaciones nutren nuestro trabajo y nos obligan a repensar una y otra vez la didáctica de la matemática.

–Todos aquellos que –como G. Sastre, M. Moreno y, sobre todo, Anne Sinclair– estudiaron la representación numérica desde una perspectiva psicogenética.

–Los maestros y los chicos que, con sus afirmaciones y sus interrogantes, hacen crecer día a día la propuesta que llevamos a la práctica.

–Las escuelas que albergan nuestro trabajo: Aequalis, Martin Buber, Numen, jardín de Infantes Municipal de Wilde.

–Raquel Gutman, por su colaboración en la primera etapa de esta investigación.

I. De cómo y por qué se inició la investigación que es objeto de estas páginas

Había que encontrar una respuesta. A pesar de los diversos recursos didácticos puestos en juego, el acceso de los niños al sistema de numeración seguía constituyendo un problema. A pesar de nuestros esfuerzos por materializar la noción de agrupamiento –no sólo en base diez, sino también en otras bases–, la relación entre esas agrupaciones y la escritura numérica seguía siendo un enigma para los niños.

Pero la cuestión era más grave aún: al entrevistar niños con los que no trabajábamos didácticamente, constatamos una y otra vez que los famosos “me llevo uno” y “le pido al compañero” –ritual inherente a las cuentas escolares– no tenían ningún vínculo con las unidades, decenas y centenas estudiadas previamente. Esta ruptura se manifestaba tanto en los niños que cometían errores al resolver las cuentas como en aquellos que obtenían el resultado correcto: ni unos ni otros parecían entender que los algoritmos convencionales están basados en la organización de nuestro sistema de numeración (Lerner, D., 1992).

Estas dificultades, lejos de ser una particularidad de los niños con los que hemos trabajado, fueron detectadas y analizadas en el marco de estudios realizados en otros países (Kamii, C. y Kamii, M., 1980/1988; Sellares, R y Bassedas, M., 1983; Bednarz B. y Janvier, B., 1982). Al constatar que los niños no comprenden cabalmente los principios del sistema, diversos investigadores proponen alternativas didácticas también diferentes. De este modo, Kamii sugiere postergar la enseñanza de las reglas del sistema de numeración, en tanto que Bednarz y Janvier intentan perfeccionar el trabajo sobre el agrupamiento explicitándolo a través de distintas materializaciones y planteando situaciones en las que agrupar resulte significativo por ser un recurso económico para contar rápidamente cantidades grandes.

Ninguna de estas dos propuestas toma en cuenta un hecho que la didáctica constructivista no puede ignorar: dado que la numeración escrita existe no sólo dentro de la escuela sino también fuera de ella, los niños tienen oportunidad de elaborar conocimientos acerca de este sistema de representación desde mucho antes de ingresar en primer grado. Producto cultural, objeto de uso social cotidiano, el sistema de numeración se ofrece a la indagación infantil desde las páginas de los libros, las listas de precios, los calendarios, las reglas, los talonarios de la panadería, las direcciones de las casas…

¿Cómo se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración? Averiguarlo era un paso necesario para diseñar situaciones didácticas que dieran oportunidad a los chicos de poner en juego sus propias conceptualizaciones y confrontarlas con las de los otros, que les permitieran elaborar diversos procedimientos y explicitar argumentos para justificarlos, que los llevaran a descubrir lagunas y contradicciones en sus conocimientos, que brindaran elementos para detectar los propios errores, que –en suma– los obligaran a cuestionar y reformular sus ideas para aproximarse progresivamente a la comprensión de la notación convencional.

Era necesario entonces –antes de elaborar una propuesta didáctica y someterla a prueba en el aula– emprender un estudio que permitiera descubrir cuáles son los aspectos del sistema de numeración que los niños consideran relevantes, cuáles son las ideas que han elaborado acerca de ellos, cuáles son los problemas que se han planteado, cuáles son las soluciones que han ido construyendo, cuáles son los conflictos que pueden generarse entre sus propias conceptualizaciones o entre éstas y ciertas características del objeto que están intentando comprender.

Las entrevistas clínicas que realizamos con parejas de niños de cinco a ocho años[1] no sólo confirmaron nuestras expectativas –al poner de manifiesto la relevancia de los conocimientos construidos por los chicos sobre la numeración escrita–, sino que además nos depararon una agradable sorpresa: desde un principio fue posible establecer regularidades al analizar los datos que obteníamos.

La aparición y reaparición de ciertas respuestas –ideas, justificaciones, conflictos– fue el disparador que nos llevó a esbozar, antes de lo previsto, posibles líneas de trabajo didáctico. Es por eso que, mientras continuábamos realizando entrevistas clínicas, empezamos a poner a prueba en el aula algunas actividades. Como suele suceder, cuando llevábamos a la práctica cada una de estas actividades, la propuesta se iba ajustando y enriqueciendo: por una parte, nosotros descubríamos nuevos problemas que era necesario resolver; por otra parte, los chicos establecían relaciones y nos sorprendían con preguntas o con procedimientos que abrían nuevas perspectivas para el trabajo didáctico.

---

[1] Entrevistamos a 50 niños; los integrantes de cada pareja pertenecían al mismo grado o sección.

Queda mucho camino por recorrer: es necesario dar respuesta a nuevos interrogantes –surgidos a partir de lo que ahora sabemos– sobre el proceso de apropiación de la numeración escrita; es imprescindible también que la propuesta diseñada sea objeto de una investigación didáctica rigurosa que permita elaborar conocimiento válido sobre la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración en el contexto escolar.

De todos modos, los resultados ya obtenidos son suficientes para poner en tela de juicio el enfoque que hasta ahora se ha dado a la enseñanza del sistema de numeración y para mostrar la eficacia de otra modalidad de enseñanza que favorece una comprensión mucho más profunda y operativa de la notación numérica.

II. Donde se cuenta la historia de los conocimientos que los niños elaboran sobre la numeración escrita

¿Qué conclusiones podrían extraer los chicos a partir de su contacto cotidiano con la numeración escrita? ¿Qué información relevante podrían obtener al escuchar a sus padres quejarse del aumento de los precios, al tratar de entender cómo sabe su mamá cuál de las marcas de un producto es la más barata, al ver que su hermano recurre al almanaque para calcular los días que aún faltan para su cumpleaños, al alegrarse porque en la panadería "ya van por el treinti" y su papá tiene el treinta y cuatro, al preguntarse qué tiene que ver la dirección que escribió su mamá (Córdoba 4859) con la indicación que le está dando a su hermana ("tenés que bajar al cuatro mil ochocientos") ... ? Dicho de otro modo: ¿qué podrían aprender los chicos al presenciar situaciones en las que los usuarios del sistema de escritura que los rodean nombran, escriben y comparan números? Preguntas como éstas nos hacíamos antes de iniciar la investigación. Suponíamos que los niños construían tempranamente criterios para comparar números; pensábamos que –mucho antes de sospechar la existencia de centenas, decenas y unidades– alguna relación debían establecer entre la posición de las cifras y el valor que ellas representan; creíamos que los chicos detectaban regularidades al interactuar con la escritura de fragmentos de la serie. Algunas producciones no convencionales que habíamos visto reiteradamente en las aulas nos llevaron a formular dos suposiciones: que los chicos elaboran criterios propios para producir representaciones numéricas y que la construcción de la notación convencional no sigue el orden de la serie, aunque ésta desempeñe un papel importante en esa construcción.

Para verificar –y también para precisar– estas suposiciones, diseñamos una situación experimental centrada en la comparación de números y otra centrada en la producción.

La primera era una variante del juego de la guerra: utilizamos un mazo de veinte cartas con números comprendidos entre el 5 y el 31 y con un único dibujo en cada carta –el que identificaba el palo–, de tal modo que la comparación se basara exclusivamente en la escritura numérica. Al finalizar cada mano, pedíamos a los niños que justificaran las decisiones tomadas durante el juego.

> La consigna que daba inicio a la segunda situación era: "Piensen un número muy alto y escríbanlo". Comenzaba luego una discusión en la que los niños opinaban sobre la escritura del compañero y decidían cuál de los dos había escrito un número mayor. Lo que ocurría después dependía mucho de las respuestas y argumentos proporcionados por los chicos y, aunque tomaba la apariencia de un "dictado de cantidades", se trataba de un dictado cuya característica central era el debate sobre las escrituras producidas.

Los datos que recogimos mostraron una alentadora coincidencia con los obtenidos en el marco de la investigación que están realizando Bressan, Rivas y Scheuer, y nos permitieron delinear el recorrido de los chicos en su intento por conocer el sistema de numeración. Intentaremos explicitar los aspectos esenciales de ese recorrido.

Cantidad de cifras y magnitud del número o “Este es más grande, ¿no ves que tiene mas números?”

Las afirmaciones de los niños entrevistados muestran que ellos han elaborado una hipótesis que podría explicitarse así: “Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número”.

Veamos algunos ejemplos:

–Alina (6 años, primer grado), al justificar sus decisiones en el juego de la guerra, afirma que 23 es mayor que 5 “porque éste (23, pero ella no lo nombra porque desconoce su denominación oral) tiene dos números y tiene más, y éste (5) tiene un solo número”.

–Loli (6 años, primer grado) afirma –en la misma situación– que 12 es mayor que 6 “porque tiene más números”.

–Alan (6 años, primer grado) pone en evidencia que la hipótesis referida a la cantidad de cifras que constituyen un número es mucho más fuerte que cualquier otra consideración vinculada al valor absoluto de cada cifra:

(El experimentador hace una contrasugestión que estaba prevista en el diseño de la situación y que fue rechazada por todos los niños cuando se comparaban números de una y dos cifras.)

Experimentador	**Alan**
A mí me dijo un chico el otro día que el más grande era éste (9), porque acá había un dos y un uno, y, el nueve era más grande que el dos y el uno.	(Se ríe) ¿Cuántos años tiene?
Después te cuento. Vos primero decíme qué pensás de lo que dijo.	Nada que ver. Un año.
¿Por qué?	¡Porque qué tienen que ver el dos y el uno! *Se forma un número solo.*
¿Se forma un número solo?	Y sí, por ejemplo, *algo de cien son tres números y forman un número solo.*

En el caso de Jonathan y Sebastián (primer grado), la hipótesis que vincula la cantidad de cifras a la magnitud del número no se refiere sólo a los números de una y dos cifras, sino que se ha generalizado a la comparación de números más grandes:

Experimentador	**Jonathan**	**Sebastián**
Ahora les voy a pedir a los dos que escriban el mil cinco.	(Ambos escriben convencionalmente	1005)
		lo escribimos los dos igual.
(A Sebastián.) Fíjate cómo lo escribió Jonathan.		
¿Y por qué escribiste así el mil cinco?	No sé.	
Si se lo tuvieras que expli-	Le diría que es con un uno,	

Experimentador	Jonathan	Sebastián
car a otro chico, ¿qué le dirían?	un cero, otro cero y un cinco.	
El otro día un nene me dijo que el mil cinco se escribía así:1000 5		Porque éste (1000) es mil y éste es cinco.
Mil cinco		No. Porque el cinco tiene que ir acá (señala el último cero de 1000).
¿Te parece que está bien así ¿ ¿Por qué?		Porque en vez del cero va el cinco.
	Es otro número.	Sí.
¿Por qué tiene que ir acá?		Es más.
	Porque tiene más números, tiene un cero más.	Porque tiene más.
¿Y éste (10005) entonces?		
¿Cómo te das cuenta?	Sí.	Sí.
¿Los que tienen más números son más grandes?		

Como se puede observar en las últimas líneas del ejemplo anterior, el criterio de comparación que los chicos han construido funciona aun cuando ellos no conozcan la denominación oral de los números que están comparando.[2] Se trata entonces de un criterio elaborado fundamentalmente a partir de la interacción con la numeración escrita y en forma relativamente independiente del manejo de la serie de los nombres de los números. Se trata también de una herramienta poderosa en el ámbito de la notación numérica, ya que permitirá comparar cualquier par de números cuya cantidad de cifras sea diferente.

Ahora bien, esta herramienta –que era manejada ya por todos los niños entrevistados para establecer comparaciones entre números de una y dos cifras y que muchos de ellos utilizaban también para comparar números compuestos por más cifras–[3] no se generaliza de forma inmediata a todos los casos.

Fue uno de nuestros sujetos el que nos mostró algunas de las dificultades por las que debe atravesar esta generalización: Pablo (6 años, primer grado), después de haber afirmado –como los niños anteriormente citados– que es mayor “el que tiene más números” siempre que se trataba de comparar un número de una cifra con otro de dos y también en algunas situaciones donde se comparaban números de dos y tres cifras (824 y 83, 138 y 39, etc.), hace afirmaciones contradictorias cuando se trata de comparar 112 y 89. En efecto, él dice en primer término que 112 es mayor que 89 (señalándolos, no conoce las denominaciones) “porque tiene más números”, pero luego cambia de opinión: “No, es más grande éste (89), porque 8 más 9 es 17, y entonces es más”.

Dado que en los otros casos Pablo no había apelado para nada a la suma de los valores absolutos de las cifras y había tomado la cantidad de cifras como criterio único

[2] Cuando los niños conocen el nombre de los números que están comparando, justifican sus afirmaciones apelando no sólo a la cantidad de cifras sino también al lugar que ocupan en la serie numérica oral: “12 es mayor por que tiene más números atrás, porque 6 para abajo tiene menos atrás” (Alan) .

[3] La información que tenemos sobre el proceso de generalización es aun insuficiente: no todos nuestros entrevistados tuvieron la oportunidad de comparar números de tres o más cifras, porque esta cuestión se planteó sólo en ciertos casos, en función de las respuestas que los niños suministraban.

para establecer la comparación, pensamos que es la gran diferencia entre los valores absolutos de las cifras de ambos números lo que lo lleva a poner en tela de juicio el criterio de comparación que había utilizado consistentemente en todos los casos anteriores, a renunciar a él y a elaborar otro específico para esa situación. Cabe preguntarse por qué Pablo no apela explícitamente al valor de los dígitos que componen esos números, sino al resultado que se obtiene al sumarlos.[4]

Aunque Pablo fue el único de los sujetos entrevistados que puso en juego otro criterio de comparación además del basado en la cantidad de cifras, consideramos significativa la información que él aporta porque confirma que –como ocurre con otros objetos de conocimiento– la generalización está lejos de ser inmediata. Además, el criterio alternativo utilizado por Pablo da cuenta de un problema que probablemente se planteen todos los chicos en determinado momento de la construcción: ¿cómo se puede explicar que un número cuyas cifras son todas “bajitas” (1110, por ejemplo) sea mayor que otro formado por cifras “muy altas” (999, por ejemplo)?

Si bien es necesario profundizar en el estudio del proceso a través del cual se construye este criterio de comparación –cómo se concibe, cómo se generaliza, qué conflictos debe afrontar–, es indudable que su elaboración constituye un paso relevante hacia la comprensión de la numeración escrita.

La Posición de las cifras como Criterio de comparación o “el primero es el que manda”

Al comparar numerales de igual cantidad de cifras, los niños esgrimen argumentos a través de los cuales se evidencia que ellos ya han descubierto que la posición de las cifras cumple una función relevante en nuestro sistema de numeración:

–Lucila (5 años, preescolar), después de afirmar que 21 es mayor que 12, lo justifica así: “Porque el uno (en 12) es primero y el dos es después; porque (en 21) el dos es primero y el uno es después”.

–Nadia (6 años, primer grado) no consigue explicar cómo se da cuenta de que 31 es mayor que 13. Se le pregunta entonces cómo se lo explicaría a otro chico, y ella responde: “Que se fije dónde está el 3 y dónde está el 1, o dónde está el 1 y dónde está el 3”.

–Alina, y sobre todo Ariel (6 años, primer grado), son más explícitos:

Experimentador	**Alina**	**Ariel**
¿Porqué ganó éste? (21) (El experimentador pide justificación de la decisión que ellos tomaron cuando los números comparados eran 12 y 2l.)		Porque éste (21) es más alto que éste(12).
Pero son los mismos números	Sí, pero al revés	Al revés.
¿Al revés? ¿Yeso qué tiene que ver?		Tiene que ver mucho. Este (el 2 de 21) es más alto que éste (el 1 de 12) y se diferencia por el primero
¿Y por que será que se diferencia por el primero?		Porque sí.
¿No hay una razón?		¡Yo qué sé!
¿Vos sabés qué número es éste?		Veintiuno
¿Y éste?	Sí, porque éste (21) esta	Doce.

[4] Esta es una de las cuestiones que será necesario seguir investigando.

¿Y de ahí podés sacar algo para darte cuenta de cuál es más alto? ¿Dónde está primero? De acuerdo. Ahora me convenciste	después y éste(12) está primero.	 Hacemos la cuenta Mira: uno, dos, tres... (sigue contando hasta doce) acá esta el doce... trece, catorce... (sigue contando hasta veintiuno) veintiuno. ¿Viste? ¿Hicimos la cuenta? (Luego, al comparar 21 y 23, Ariel dice que este último es mayor, porque tres es más que uno y, ante una pregunta del experimentador, aclara que en este caso se fija en el segundo número “porque en el primero hay un dos y un dos”.)

Otros sujetos explicitan con mayor claridad aún cómo debe aplicarse el criterio de comparación basado en la posición de las cifras. Véamos cómo lo expresa Guillermo:

	Guillermo	**Yael**
		(Ya decidió que 21 es mayor que 12.) Tienen los mismos números. Nada más que acá el dos está adelante y acá está atrás.
	El que más valor tiene es Los dos tienen valor. el de adelante.	
	Sí, los dos tienen valor. Podés fijarte en el de atrás. *Pero primero fíjate en el de adelante*. [...] Si el primer número de una carta es igual al primer número de la otra y el segundo es uno más alto que el otro, sí importa el segundo.	

Los niños citados han descubierto ya –además de la vinculación entre la cantidad de cifras y la magnitud del número– otra característica específica de los sistemas posicionales: el valor que una cifra representa, lejos de ser siempre el mismo, depende del lugar en el que esté ubicada con respecto a las otras que constituyen el número. Saben también que, si se comparan dos números de igual cantidad de cifras, será necesariamente mayor aquel cuya primera cifra sea mayor y por eso pueden afirmar –

como lo hicieron muchos de los sujetos entrevistados– que “el primero es el que manda”. Saben además que, cuando la primera cifra de las dos cantidades es la misma, hay que apelar a la segunda para decidir cuál es mayor.

Llama la atención el hecho de que para muchos niños los argumentos estrictamente referidos a la numeración escrita tengan prioridad sobre los vinculados a la serie numérica oral. Alina y Ariel, por ejemplo, justifican originalmente sus afirmaciones apelando a la posición de las cifras en los números escritos (“Están al revés”, “Se diferencia por el primero”), y sólo aportan argumentos referidos a la serie oral (“Sí, porque éste [21] está después y éste [12] está primero”) cuando el experimentador los insta a hacerlo.

Ahora bien, tal como lo observáramos en relación con la hipótesis referida a la cantidad de cifras, el criterio de comparación basado en la posición de las cifras está lejos de construirse de una vez y para siempre, ya que su generalización requiere también la superación de algunos obstáculos. Es lo que nos muestra Alina, quien –a pesar de haber aplicado consistentemente este criterio en casi todos los casos– tropieza con una dificultad cuando se trata de comparar 25 y 16:

(La situación se produce durante el Juego. La carta de Alina tiene el número 25, la de Ariel el número 16.)

Experimentador	**Alina**	**Ariel**
¿ Quién ganó?	Ganó Ariel. El, porque éste (25) tiene un dos y un cuatro (!), y éste (16), un uno y un seis [...]).Este (25) tiene un número menos, y éste (señalando el 6 de 16), un número más.	No, ganó ella. ¡No! Pero se cuenta con el primero.

Alina parece sostener aquí que es mayor el número que contiene la cifra más alta, independientemente del lugar en que ella esté ubicada. Parece que, también en este caso, el valor absoluto de los números puede hacer dudar de la validez de un criterio que se consideraba válido para muchos otros casos.

Por otra parte, como lo muestran claramente algunas respuestas de Ariel (“Porque sí”, “,Yo qué sé!”), el conocimiento que los niños tienen sobre la variación del valor de las cifras en función del lugar que ocupan no va acompañado –ni mucho menos precedido– por el conocimiento de las razones que originan esta variación. Estos niños no sospechan aún que “el primero es el que manda” porque representa grupos de 10 si el número tiene dos cifras, de 102 Si tiene tres... en tanto que las siguientes representan potencias menores de la base 10.

Todavía no han descubierto la regla del sistema (la agrupación recursiva en base 10), pero esto no les impide en absoluto elaborar hipótesis referidas a las consecuencias de esa regla –la vinculación entre la cantidad de cifras o su posición y el valor del número– y utilizarlas como criterios válidos de comparación de números. A partir de estas hipótesis, ellos podrán sin duda plantearse –y el maestro podrá plantearles–interrogantes que los conducirán, a través de aproximaciones sucesivas, a descubrir las reglas del sistema.

En efecto, en tanto que Ariel no intenta justificar su afirmación –contesta con un lacónico “porque sí” cuando se le pregunta por qué “se diferencia por el primero”–, otros niños han encontrado ya una explicación de ese criterio que ellos mismos han elaborado. Es lo que nos muestra, por ejemplo, Guillermo (6 años, primer grado), quien se ve obligado a explicitar su argumentación para convencer a su compañera:

Experimentador	**Guillermo**	**Yael**
¿Cuál es más alto? (se están comparando 25 y 31).	Este (31).	A mí me parece que éste(25), porque tiene un dos y un cinco y éste (31) tiene un tres y, un uno. Más altos son éstos números (señalando las cifras de 25).
	Este (31) es más alto. ¿Por qué? Porque mirá: no tiene nada que ver el segundo número con el primero, porque acá *tres* y acá (2 de 25) *dos*. Dos es menos que tres. Esto es *treint*iuno y esto es *veinti*cinco, no *treinti*cinco.	
(A Yael) ¿Qué te parece lo que él dice? ¿Lo entendés? Explicále mejor, Guillermo.		No (riéndose).
	Mirá, primero viene el diez y segundo saltás diez, diez, diez, así ¿no? Entonces se cuenta, diez, veinte, treinta... entonces al treinta le *sacamos* cinco y nos queda veinticinco y, acá (31) al treinta le *agregamos* uno, nos queda treinta y uno.	

Guillermo no ha oído aún hablar de “decenas” (acaba de ingresar en primer grado); ni siquiera afirma que la primera cifra de un número de dos cifras se refiere a “dieces”. Pero él sabe muy bien que esa primera cifra se refiere a algo del orden de los “veinti”, “treinti” o “cuarenti” en lugar de representar simplemente “dos”, “tres” o “cuatro”, y sabe también que esos números –veinte, treinta, etc.– se obtienen contando de a diez en el orden de la serie.

Sin disponer del extraordinario manejo operatorio que refleja el último argumento de Guillermo, otros niños han proporcionado argumentos similares al primero que él aporta. Seguramente, este tipo de justificación se hace posible cuando los niños logran coordinar lo que han descubierto en la escritura numérica –que el valor de una cifra varía en función de la posición que ocupa– con la información que les aporta la serie numérica oral. a partir de la cual ellos pueden establecer intervalos constituidos por “veintis”, “treintis”, etcétera.

Ahora bien, ¿qué ocurre cuando los niños intentan combinar los conocimientos que ellos han construido con los que les han impartido en la escuela? Para responder a esta pregunta, tomaremos como ejemplo a los únicos niños de primer grado que incluyeron en sus respuestas la palabra “decenas”.

Experimentador	***Loli***	***Alan***
(Los niños afirmaron que veintiuno es mayor que doce) ¿Cómo saben que es más grande, si los dos tienen		

Experimentador	*Loli*	*Alan*
los mismos números?		
	Acá (21) el dos está delante y acá (12) está atrás. Sí.	
Yo no me doy cuenta muy bien, porque son los mismos números.	Sí, pero no están igual ordenados.	
		Esto (12) es una decena ¡Ah! ¡No! Es una *docena*.
¿Cuál? ¿Y veintiuno?		Yo no lo sé...Qué es veintiuno una decena... ¡qué se yo!
¿Una decena?	Sí, tiene una, dos. Acá (señala el 2 del 21).	Creo... ¿o no? No, no tiene ninguna decena. El uno no es ninguna decena y el dos tampoco
	El veinte sí, en el veinte sí hay dos decenas.	

¿Por qué introduce Alan el término “decena”? Tal vez porque sospecha la existencia de alguna relación entre ese término y el valor de la cifra que aparece ubicada “adelante” en los números de dos cifras. Pero esta sospecha es suficientemente vaga como para que él pueda afirmar que 21 “no tiene ninguna decena, el uno no es ninguna decena y el dos tampoco”.

En el caso de Loli, ocurre algo diferente: aunque ella no acude espontáneamente al concepto de decena –sino a la posición de las cifras– para explicar por qué 21 es mayor que 12, parece comprender que el 2 de 21 representa dos decenas. Su respuesta final muestra claramente cómo llegó a comprenderlo: puede entender que en 21 hay dos decenas porque ese 2 no significa para ella “dos” sino “veinti”.

Cabe preguntarse entonces: ¿aprender el concepto de decena ayuda realmente a conocer los números? ¿O es más bien el conocimiento de los números –y de su escritura– lo que ayuda a comprender el concepto de decena?

Algunos números privilegiados: el rol de los nudos

La apropiación de la escritura convencional de los números no sigue el orden de la serie numérica: los niños manejan en primer lugar la escritura de los nudos –es decir de las decenas, centenas, unidades de mil..., exactas– y sólo después elaboran la escritura de los números que se ubican en los intervalos entre nudos.

Veamos ante todo las respuestas de los niños:

Experimentador	*Gisela*
Escribí un número, el que tengas ganas, que te parezca bastante alto.	(Escribe 1000).
¿Cuál es ése?	El mil.
¿Y el dos mil cómo se escribe?	(Escribe 200.)
¿Ese es el dos mil?	(Agrega un cero a su escritura anterior.)
¿Y éste (200) cuál es?	Doscientos.
¿Y éste? (tapando un 0 del 1000)	El cien.

¿Y el tres mil?	(Escribe 3000).
¿Y cómo escribirías el dos mil quinientos?	(Gran desconcierto.) No me acuerdo.
¿Y el quinientos?	(Escribe 005.)
Acá tenés el dos mil (señalando una escritura anterior) y acá el quinientos...No te servirá para nada para escribir el dos mil quinientos?	Sí... (No se anima.)

El caso de Nadia (6 años, primer grado) es aún más claro:

Experimentador	***Nadia***
Ahora te voy a pedir que escribas un número que vos pienses que es muy alto	¿Muy alto?
Sí.	Voy a escribir como máximo mil (escribe 900).
¿Cuál es?	Novecientos.
¿Y mil cómo es?	(Escribe 1000.)
¿Cómo te parece que será dos mil?	(Escribe 2000.)
¿Y cuatro mil ?	(Escribe 4000.)
¿ Nueve mil ?	(Escribe 9000.)
¿ Diez mil ?	(Escribe 10000.)
Y decíme... Mil cien, ¿cómo te parece que es?	(Muy sorprendida.) ¿Mil cien? Para mí ese número no existe.
¿ No existe ¿	(Piensa un largo rato y luego escribe, 1000100.)
¿Mil quinientos?	(Escribe 1000500.)

Si bien la mayoría de los niños entrevistados escribían ya en forma convencional los nudos de las decenas, las centenas y las unidades de mil, obtuvimos algunas respuestas que proveen indicios sobre el camino que los niños recorren para elaborar estas escrituras. Observemos, por ejemplo, las producciones y reflexiones de Christian (5 años, preescolar) en la siguiente situación:

Experimentador	***Christian***	***Rubén***
[...} ¿Y cómo escribirían ustedes		

Experimentador	***Christian***	***Rubén***
el cien?	Ah, No, yo lo puedo escribir bastantes veces el cien.	
¿Cómo es?	Un uno (lo escribe) y dos ceros (los escribe)	(Escribe 100.)
¿Y el doscientos?	Yo no lo sé escribir.	Acá está el doscientos (escribe 200).
¿Y el trescientos?	Voy a escribir todos los números desde el cien hasta donde se termina el cien. 100 100 200 cien ciento ciento uno dos	(Escribe 300)
Este (marcando el primer número escrito por Christian) ¿es el cien?	Sí.	
¿Y cuál es el ciento uno?	Este (marca su segundo número: 100).	
¿Y es igual que éste? (Señalando el primero.)	Sí..., no, porque éste (señalando el primer 100) tiene el cero más chiquito y éste (marcando el segundo) tiene el cero más grande.	
Ah! ¿ El que tiene el cero más grande es ciento uno? (Es cierto!!)	Sí, y el uno también es más grande.	
Ajá...¿Y ciento cinco, cómo sería?	Esperá que quiero escribir desde el uno hasta donde termina el cien.	(Escribe 105.)
Bueno, cuando termines, avisános. (Mientras tanto, se pide a Rubén que escriba ciento treinta, ciento treinta y ocho, doscientos veintitrés, quinientos.)	(Christian ha escrito: 100 100 200 3000 400)	(Escribe: 130 138 223 500.)
Y vos, Christian , ¿podrías escribir quinientos?	¿ Quién no lo sabe al quinientos? Espero que me salga bien el cinco. (Escribe 500.)	
Bueno, explícame lo que	(Lee) 100 100 200 300 400 cien ciento ciento ciento ciento uno dos	
Vos dijiste antes que ibas a escribir hasta que se acabar		

Experimentador	***Christian***	***Rubén***
el cien, ¿Cuándo se acaba el cien?	tres cuatro	
	(Piensa un rato) Iba a escribir hasta ciento nueve (agrega a su serie 500) 100 100 200 300 400 500	
¿Cuál era ése?	Es el ciento cinco (señalando 500) El mismo, mirá!! (mostrando la escritura anterior de 500 que él mismo había producido.)	
¿Y éste? (señalando el que él acaba de producir).	Quinientos.	
¿Y te parece que puede ser que quinientos y ciento cinco se escriban igual?	Ciento cinco.	
¿Y cómo nos damos cuenta de cuál es cuál?	No.	
¿Con los mismos números?	Hago uno grande y uno chiquito.	(Ha escrito mientras tanto, a pedido del experimentador siempre en forma convencional: 110, 900,932,907)
¿Con raya cuál es? ¿Y sin raya?	A éste (al que había interpretado antes como quinientos) le hago una raya : 500 y al otro lo dejo sin raya.	
¿Y mil?	Quinientos.	1000
A ver, ¿cómo lo escribirían?	Ciento cinco.	
	Yo lo sé escribir.	
	(Escribe 1000.) Cómo no voy a saber escribir el mil si antes escribí el cien mil! (Efectivamente, lo había escrito así: 1001000.)	

Christian maneja ya la escritura convencional de la segunda y la tercera potencia de la base (100 y 1000). ¿Cómo utiliza el conocimiento de la escritura de cien para producir los números siguientes? Parece que no la utiliza como base para producir los otros nudos de las centenas –él dice que no sabe escribir doscientos, y quinientos parece ser una forma fija, probablemente conocida a través del billete de 500 australes–,[5] sino para hipotetizar acerca de la escritura de los números comprendidos entre cien

[5] Cuando se entrevistó a Christian, los australes estaban aún en curso.

y ciento diez. El supone que estos números tendrán dos ceros –como cien– y que se diferenciarán de cien por la cifra inicial. El problema es que esta hipótesis no le permite diferenciar –utilizando números distintos– cien de ciento uno, y seguramente es por eso que apela al tamaño para diferenciarlos. Resulta además impactante constatar que el hecho de conocer la escritura convencional de quinientos no lo lleva a dudar de su hipótesis –en efecto, sigue afirmando que 500 representa ciento cinco–, sino a emplear un recurso no numérico para diferenciar las dos escrituras.[6]

Ahora bien, varios niños nos proveyeron –trabajando en el aula– escrituras aparentemente inversas a las de Christian, pero cuyo significado nos parece similar: ellos escriben cuatrocientos como 104, trescientos como 103, seiscientos como 106. Estos niños piensan que la escritura de los otros nudos de las centenas conserva características de la escritura de 100: también tienen tres cifras, pero en este caso se mantienen las dos primeras –el uno y el cero iniciales de 100– y se expresa la diferencia variando el último número.

Todos estos datos sugieren que los niños se apropian en primer término de la escritura convencional de la potencia de la base (100, es decir 10^2, en este caso), y que la escritura de los otros nudos correspondientes a esa potencia se elabora sobre ese modelo, conservando la cantidad de cifras, manteniendo dos de las cifras que componen cien y variando la otra. El caso de Christian indica que un procedimiento similar podría ser utilizado –al menos por algunos niños– para reconstruir la escritura de los números ubicados entre 100 y 110. El problema que se les planteará entonces será el de encontrar una manera de diferenciar numéricamente la escritura de doscientos y la de ciento dos, la de quinientos y la de ciento cinco, etcétera. La búsqueda de esta diferenciación seguramente conducirá a descubrir que en el caso de los nudos (200, 300, etc.) lo que varía –en relación con la escritura de cien– es el primer número, en tanto que en el caso de 101 ... 109, lo que varía es el último.

El papel de la numeración hablada

Los niños elaboran conceptualizaciones acerca de la escritura de los números, basándose en las informaciones que extraen de la numeración hablada y en su conocimiento de la escritura convencional de los nudos.

Para producir los números de cuya escritura convencional no se han apropiado aún, los chicos yuxtaponen los símbolos que conocen disponiéndolos de modo tal que se correspondan con el orden de los términos en la numeración hablada.

Veamos algunas escrituras y justificaciones de los sujetos entrevistados que ilustran claramente lo que intentamos decir:

–Lucila y Santiago (los dos tienen cinco años y asisten al jardín de infantes) escriben:

108 109

Los dos interpretan sus escrituras como “dieciocho” y “diecinueve” respectivamente.

–Yael hace algo similar, pero además nos lo explica:

Mientras está registrando su puntaje en el juego de la guerra, anota “dieciocho” como 108 y justifica diciendo que dieciocho se escribe así “porque hay un diez, que es un uno y un cero, entonces se ponen los dos con el ocho”.

Guillermo –su compañero, que escribe convencionalmente los números de dos cifras– objeta: “¡No! Porque es como pasa con el veinte o con el treinta... Porque el cero se usa para el treinta, pero no se usa para el treinta y uno, ni para el treinta y

[6] Aunque el recurso que utiliza Christian pueda parecer exótico, tal vez resulte más pertinente si se recuerda que otros sistemas de numeración –como por ejemplo el romano– han apelado a grafías del mismo tipo para diferenciar números (V y $\overline{V}$).

dos, ni para el treinta y tres. [...] De tres números no se puede, no se puede [...] porque el cien se escribe así [100]". Yael lo escucha atentamente, pero un rato después escribe treinta y cuatro como 304 y –al mirar la escritura convencional de Guillermo (34)– afirma: "Para mí, se puede hacer de las dos maneras".

– Martín (6 años, primer grado) escribe:

700	25	1000	800	32
Setecientos	veinticinco	mil	ochocientos	treinta y dos
8000	200	6000	300	45
ocho mil	doscientos	seis mil	trescientos	cuarenta y cinco

En el último caso, corrige su escritura después de interpretarla y lo hace así: 630045.

–Dan (6 años, primer grado) escribe también 600030045; al igual que Martín, considera incorrecta su escritura, pero la corrige de otra forma: 63045.

–Daniela (5 años, preescolar), que escribe convencionalmente todos los números de dos y tres cifras que le proponemos, y también un número de cuatro cifras (1036), hace algo diferente cuando le pedimos que escriba mil quinientos treinta y seis. Su producción original es: 1000 500 36,

la lee así: mil quinientos treinta y seis

e inmediatamente la corrige: 1000536.

Luego escribe ocho mil quinientos treinta y cuatro: 8 1000 50034, y en seguida rectifica: 8 1000534. Para cuatro mil ciento cuarenta y cinco produce: 4 1000 145.

– Christian –quien, como hemos visto en el punto anterior, escribe convencionalmente cien y mil, pero produce los números comprendidos entre 100 y 110 basado en una hipótesis que le es propia– escribe en forma convencional también un millón (1.000.000). Sin embargo, cuando le solicitamos que escriba otros números, sus producciones son las siguientes:

Mil ciento cinco: 1000 100 5
Dos mil: 2 1000
Diez mil: 10 1000
Cien mil: 100 1000

Al comparar su escritura de cien mil con la de Rubén (100.000), Christian considera posibles las dos escrituras: "Si yo le sacara éste (el 1 de 1000) y pusiera un punto, igual dice cien mil". Pero en seguida señala: "También sé escribir un millón diez" y escribe: 100000010. "Cuando escribís un millón diez –agrega– no podés sacarle el uno (el de diez), porque no sabés si es ése. Y entonces, ¿cómo adivinás qué número es? No sabés que es diez". (En otros términos, este uno no puede reemplazarse por un punto, como ocurre con el 1 de 1000 en cien mil).

La hipótesis según la cual la escritura numérica resulta de una correspondencia con la numeración hablada conduce a los niños a producir notaciones no convencionales. ¿Por qué ocurre esto? Porque, a diferencia de la numeración escrita, la numeración hablada no es posicional.

En efecto, si la organización de la numeración hablada fuera posicional, la denominación oral correspondiente a 4705, por ejemplo, sería "cuatro, siete, cero, cinco"; sin embargo, la denominación realmente utilizada para ese número explicita, además de las cifras cuatro, siete y cinco, las potencias de diez correspondientes a esas cifras (cuatro *mil setecientos* cinco).

Otra cuestión que debe ser tomada en cuenta es la de las operaciones involucradas en la numeración hablada y en la numeración escrita.

En la numeración hablada, la yuxtaposición de palabras supone siempre una operación aritmética, operación que en algunos casos es una suma (mil cuatro significa 1000 + 4, por ejemplo) y en otros una multiplicación (ochocientos significa 8 x 100, por ejemplo). En la denominación de un número, estas dos operaciones aparecen en general combinadas (por ejemplo, cinco mil cuatrocientos significa 5 * 1000 + 4 - *100) y –como para complicarle la existencia a quien intente comprender el sistema– un simple cambio en el orden de enunciación de las palabras indica que ha cambiado la operación aritmética involucrada: cinco mil (5 - 1000) y mil cinco (1000 + 5), seiscientos (6 - 100) y ciento seis (100 + 6). Para colmo de males, la conjunción “y” -que representa lingüísticamente la adición- sólo aparece cuando se trata de reunir decenas y unidades.

Ahora bien, ¿podemos afirmar que las escrituras no convencionales producidas por los chicos son efectivamente aditivas y/o multiplicativas? Cuando ellos escriben doscientos cincuenta y cuatro como 200504, ¿piensan que el valor total de ese número se obtiene sumando 200+50+4?; cuando escriben 4 1000 para cuatro mil, ¿están representando la idea de que el valor total de ese número se obtiene multiplicando 4 * 1000? ¿Comprenden los niños las operaciones que parecen estar involucradas en sus escrituras o bien éstas resultan simplemente del establecimiento de una correspondencia con la numeración hablada?

Nos interesa encontrar respuestas para los interrogantes formulados porque la suma y la multiplicación por las potencias de la base están también involucradas en la numeración escrita convencional. Por lo tanto, si los chicos descubrieran las operaciones implicadas en la numeración hablada, este conocimiento sería relevante para entender cómo funciona la numeración escrita.

La numeración escrita es al mismo tiempo más regular y más hermética que la numeración hablada. Es más regular porque la suma y la multiplicación se aplican siempre de la misma manera: se *multiplica* cada cifra por la potencia de la base a la que corresponde, se *suman* los productos resultantes de esa multiplicación. [7] Es más hermética porque en ella no hay ningún rastro de las operaciones aritméticas involucradas y porque –a diferencia de lo que ocurre con la numeración hablada– las potencias de la base no se representan a través de símbolos particulares sino que sólo pueden inferirse a partir de la posición que ocupan las cifras.

Hemos iniciado indagaciones destinadas a responder las preguntas antes planteadas. Los datos recogidos hasta ahora muestran que los chicos que producen notaciones en correspondencia con la numeración hablada pueden haber descubierto o no las relaciones aritméticas subyacentes a ella: mientras que algunos vinculan –por ejemplo– la escritura 200 50 4 a la adición de 200, 50 y 4, otros la justifican apelando exclusivamente a las palabras que constituyen la denominación oral del número representado. Estos resultados –muy insuficientes aún– llevan a suponer una progresión posible desde una simple correspondencia entre el nombre y la notación del número hacia la comprensión de las relaciones aditivas y multiplicativas involucradas en la numeración hablada. Las escrituras numéricas no convencionales producidas por los niños están hechas entonces a imagen y semejanza de la numeración hablada. Ahora bien, quien adhiere a la escritura no convencional ¿lo hace en forma absoluta o es simultáneamente partidario de la notación convencional?

En las escrituras numéricas realizadas por cada niño en el curso de una entrevista, coexisten modalidades de producción distintas para números ubicados en diferentes intervalos de la serie. En efecto, niños que escriben convencionalmente cual-

[7] $4815 = 4 \cdot 10^3 + 8.\ 10^2 + 1.10^1 + 5.\ 10^0$

quier número de dos cifras (35, 44, 83, etc.) producen escrituras en correspondencia con la numeración hablada cuando se trata de centenas (10035 para ciento treinta y cinco, 20028 para doscientos veintiocho, etc.). Del mismo modo, niños que escriben convencionalmente números de dos y tres cifras apelan a la correspondencia con lo oral cuando se trata de escribir miles: escriben –por ejemplo– 135, 483 o 942 en forma convencional, pero representan mil veinticinco como 100025 o mil trescientos treinta y dos como 100030032 o 1000332.

Sin embargo, la coexistencia de escrituras convencionales y no convencionales puede aparecer también para números de la misma cantidad de cifras: algunos chicos escriben convencionalmente números entre cien y doscientos (187,174, etc.), pero no generalizan esta modalidad a las otras centenas (y anotan entonces 80094 para ochocientos noventa y cuatro o 90025 para novecientos veinticinco). Por otra parte, muchos niños producen algunas escrituras convencionales y otras que no lo son en el interior de una misma centena o de una misma unidad de mil: 804 (convencional), pero 80045 para ochocientos cuarenta y cinco; 1006 para mil seis, pero 1000324 para mil trescientos veinticuatro.

Señalemos, finalmente, que la relación numeración hablada numeración escrita no es unidireccional: así como la información extraída de la numeración hablada interviene en la conceptualización de la escritura numérica, recíprocamente, los conocimientos elaborados sobre la escritura de los números inciden en los juicios comparativos referidos a la numeración hablada. Veamos, por ejemplo, lo que ocurre con Christian (5 años) al comparar cien mil y mil cien:

Experimentador	***Christian***
¿Cómo escribirías mil cien?	No, cien mil.
Cien mil es un número. Mil cien, ¿es otro número?	No, es igual. Es al revés.
¿Pero es el mismo número? Por ejemplo, si yo digo que tengo cien mil australes o mil cien australes, ¿es lo mismo?	No, porque está al revés el número.
¿Y cuándo tengo más? ¿Cuando tengo cien mil o cuando tengo mil cien australes?	Cuando tengo mil cien.
¿Y cómo te das cuenta de que mil cien es más?	Porque en mil cien está el mil primero, y el mil es más grande que el cien.
	(Respuestas similares se producen luego al comparar diez mil y mil diez.)

Christian aplica a la numeración hablada un criterio que, como sabemos, ha elaborado para la numeración escrita: “El que manda es el primero”. El razonamiento subyacente al argumento que esgrime parece ser el siguiente: cien mil y mil cien están compuestos los dos por los mismos símbolos –mil y cien (o 1000 y l00)–; para saber cuál es mayor, hay que fijarse en el de adelante. Christian supone que esta regla –válida para la numeración escrita– es válida también para la numeración hablada y es esta suposición de una coherencia mayor que la existente la que lo induce a error. Evidentemente, no es tarea fácil descubrir qué es lo que está oculto en la numeración hablada y qué es lo que está oculto en la numeración escrita, aceptar que lo uno no coincide siempre con lo otro, detectar cuáles son las informaciones provistas por la numeración hablada que resulta pertinente aplicar a la numeración escrita y cuáles no, descubrir que los principios que rigen la numeración escrita no son directamente trasladables a la numeración hablada...

Y, sin embargo, a pesar de todas estas dificultades inherentes al objeto de conocimiento, los niños se apropian progresivamente de la escritura convencional de los números que antes producían a partir de la correspondencia con la numeración hablada. ¿Cómo lo hacen? Es lo que trataremos de mostrar en el próximo punto.

Del conflicto a la notación convencional

Dos de las conceptualizaciones que hemos descrito en los puntos anteriores llevarán a los niños a conclusiones potencialmente contradictorias:

–por una parte, ellos suponen que la numeración escrita se corresponde estrictamente con la numeración hablada,

–por otra parte, ellos saben que en nuestro sistema de numeración la cantidad de cifras está vinculada a la magnitud del número representado.

La primera de estas conceptualizaciones se aplica fundamentalmente a la escritura de números ubicados en los intervalos entre nudos, en tanto que estos últimos son representados en forma convencional. En consecuencia, las escrituras producidas por los niños para los números ubicados a entre dos nudos determinados tendrán más cifras que las que representan a los nudos mismos: ellos escribirán convencionalmente, por ejemplo, 2000 y 3000, pero dos mil setecientos ochenta y dos será representado como 200070082 (o, eventualmente, como 2000782).

El niño podría aceptar que dos mil setecientos ochenta y dos se escriba con más cifras que dos mil, puesto que el primero es mayor que el segundo. Pero, si él piensa simultáneamente que un número es mayor cuantas más cifras tenga, ¿cómo puede aceptar que dos mil setecientos ochenta y dos se escriba con más cifras que tres mil? De este modo, la escritura producida a partir de una de sus conceptualizaciones –la correspondencia con la numeración hablada– resulta inaceptable si se la evalúa a partir de otra de sus conceptualizaciones –la vinculación entre cantidad de cifras y magnitud del número.

¿Cómo maneja el niño esta contradicción entre sus conceptualizaciones? ¿Toma conciencia de ella de inmediato? ¿En qué se apoya para resolverla?

Los datos recogidos hasta ahora sugieren que, en un comienzo, la contradicción detectada por el observador no se constituye en un conflicto para los niños. Veamos algunos ejemplos:

Experimentador	***Christian***	***Rubén***
Ahora les voy a pedir que escriban cuatro mil ciento tres.	410001003.	4000103.
¿Cuál es más grande, cuatro mil o cuatro mil ciento tres?	Siempre es más grande que cuatro mil.	
¿Cuál es más grande?	Porque cuatro mil es un cuatro y tres ceros pero cuatro mil ciento tres tiene más de tres ceros; porque mirá, contá: uno, dos tres, cuatro, cinco (mientras	

Experimentador	***Christian***	***Rubén***
	cuenta los ceros de su escritura).	5000 (el cinco lo escribe en espejo)
Y el cinco mil, ¿cómo es?	51000	
Vamos a discutir cuál es la diferencia entre lo que pusieron los dos.	(Para Christian es lo mismo.)	(Según Rubén no hay que poner el uno.)
	¿No te acordás de que antes dijimos que podíamos poner el mil con uno o sin uno? ¿No te acordás?	
Parece que él no está de acuerdo Entonces, entre cuatro mil ciento tres y cinco mil, ¿Cuál es más?		Cuatro mil ciento tres.
	Siempre es más éste. (410001003).	
¿Cuatro mil ciento tres es más que cinco mil?	No...., éste...., sí. Sí, éste es más, porque mirá qué diferencia: tres ceros acá, y acá... ¿Cuántos ceros?	
0 sea que.....	(Interrumpe) ¡Ah!, pero eso sí, una cosita, más que un millón NO es esto, *no te creas que es el último número infinito.*	
No, no me lo creo. ¿Me pueden explicar un poco más por qué el cuatro mil ciento tres es más que el cinco mil?		Este (4000103).
	Sí, porque éste (51000) tiene menos ceros.	
¿Vos, Rubén, qué pensás?		Porque es más grande.
¿Por qué?		Sí.
¿Porque tiene más números?		

Christian y Rubén se centran exclusivamente en la cantidad de cifras de las escrituras que ellos mismos han producido y parecen ignorar cualquier otra consideración acerca del valor de los números representados. ¿Piensan ellos realmente que cuatro mil ciento tres es mayor que cinco mil? ¿O bien saben que cinco mil es mayor que cuatro mil ciento tres, pero no pueden hacer intervenir aquí este conocimiento? La duda momentánea de Christian (“No... éste... sí [...]”), es en este caso, el único indicio de que él podría tener algún motivo para cuestionar el juicio que emite basándose en la cantidad de cifras.

Las respuestas de Gisela (5 años, preescolar) muestran más claramente que no es suficiente con conocer el valor de los números para tomar conciencia del conflicto, ni –menos aún– para contrarrestar las conclusiones fundamentadas en la cantidad de cifras:

Experimentador	*Gisela*
(Se está trabajando con dinero. Gisela ha contado billetes de a diez y de a cien)	
¿Y cómo formás mil quinientos?	Con éste y con éste (toma un billete de mil australes y otro de quinientos) .
Muy bien. Y mil quinientos, ¿cómo se escribirá?	No sé.
Probá, como a vos te parezca	(Piensa un largo rato.)
¿Qué números te parece que tiene mil quinientos?	[...] Sí. Sí.
¿Tendrá uno?	Sí.
¿Y cinco?	
¿Y cero?	(Escribe 1000500.) *Es muy largo*.
Bueno, escribílo como a vos te parece que es.	Sí.
¿Te parece muy largo para ser mil quinientos?	Sí, es.
	(Escribe 2000500.)
¿Será o no será mil quinientos?	
Ajá. ¿Cómo escribirías dos mil quinientos?	Dos mil quinientos.
Escucháme una cosa. ¿Cuál es más, dos mil quinientos o tres mil? (Señalando 3000, que Gisela había escrito antes convencionalmente).	(Toma tres billetes de mil.) (Toma dos billetes de mil y, uno de quinientos.)
Formá tres mil con la plata.	
	Tres así (señalando los tres billetes de mil).
¿Y dos mil quinientos?	
¿Y qué es más: dos así y uno así (dos de mil y uno de quinientos) o tres así (tres de mil)?	Sí.
Ahora fijáte cómo están escritos. Vos dijiste que éste (3000) es tres mil y éste (2000500) es dos mil quinientos, ¿no?	Este (señala 2000500).
	Tres mil.
¿Y cuál es más?	
	Este (2000500).
Y con la plata (señalando los montoncitos), ¿cuál es más?	No, no importa.
Y acá (señalando las escrituras), ¿cuál es más?	
¿Y no importa que con la plata sea más éste (montón de tres mil australes)?	

Es indudable que Gisela sabe –al menos con referencia al dinero– que tres mil representa una cantidad mayor que dos mil quinientos. Sin embargo, cuando se le pide que compare los números tomando en cuenta la representación escrita que ha hecho de ellos, parece "olvidar" el significado y centrarse únicamente en la cantidad de cifras de los significantes que ha producido. Además –y a pesar de haber señalado ella misma que su escritura 1000500" era muy larga para representar ese número–, no parece advertir contradicción alguna entre sus afirmaciones sucesivas. Es como si ella pensara: "Si me fijo en los billetes, tres mil es más; si me fijo en los números escritos, es más 2000500".

De este modo, al centrarse alternativamente en el referente y en el significante –sin relacionar para nada estas dos centraciones–, Gisela evita tomar conciencia del conflicto que se le plantearía si pudiera tomar en cuenta simultáneamente ambas cuestiones.

Las respuestas de otros sujetos nos muestran que, tarde o temprano, hay que enfrentarse con el conflicto:

Experimentador	***Dany (6 años, primer grado)***
(Se están comparando oralmente pares de números, sin referir las comparaciones a ningún material concreto.)	
¿Cuál será más grande, ochocientos o setecientos cincuenta?	Ochocientos es más grande.
¿Cómo escribirías ochocientos?	(Escribe 800.)
¿Y setecientos cincuenta?	(Escribe 70050.)
	(Se queda perplejo, contemplando los números que ha escrito.)

–Otros niños, después de haber producido escrituras en correspondencia con la numeración hablada, señalan de inmediato que "son demasiados números" y –lejos de limitarse a señalarlo, como lo había hecho Gisela– hacen reiterados intentos de modificar su producción para lograr reducir la cantidad de cifras. Es lo que hacen, por ejemplo, Martín y Dan (citados en el punto anterior) cuando transforman su escritura original para seis mil trescientos cuarenta y cinco (600030045) en 630045 y 63045 respectivamente. Ante cada pedido del experimentador, estos niños vuelven a producir una escritura en correspondencia con la numeración hablada, pero se muestran insatisfechos con el resultado y lo corrigen, suprimiendo uno o más ceros de la escritura original. Sin embargo, el resultado de estas correcciones coincide sólo en algunos casos con la escritura convencional, porque los niños siempre dejan *por lo menos* un cero: mil treinta y seis, por ejemplo, llega a ser escrito como 1036 (a partir de 100036), en tanto que la versión final de mil quinientos treinta y seis es 10536.

–Luciana también advierte el conflicto, pero intenta resolverlo modificando la lectura del número, en lugar de corregir su escritura:

Experimentador	***Luciana***	***Leandro***
¿Cómo escribirían ocho mil novecientos veinticuatro?	(Escribe 800090024.)	(Escribe 8924.)
Comparen lo que pusieron los dos.		(Señalando la escritura de Luciana) ¡No! Ése es muy alto.
	Bueno... (Se ríe). Entonces ahora yo lo leo de otra for-	

Experimentador	Luciana	Leandro
	ma: ocho mil *millones* novecientos veinticuatro.	

Luciana comprende muy bien –y comparte– la objeción formulada por Leandro. Seguramente es por eso que propone una nueva interpretación de su escritura, haciéndola corresponder con un número mucho más alto, tan alto como para representarse por una escritura de nueve cifras. Sin embargo, cuando se le pide –unos minutos después– que escriba siete mil veinticinco y mil quinientos, ella anota: 7100025 y 1000500.

La primera manifestación de que los niños comienzan a hacerse cargo del conflicto es entonces la perplejidad, la insatisfacción frente a la escritura por ellos producida. Esta insatisfacción lleva luego a efectuar correcciones dirigidas a “achicar” la escritura –o a interpretarla atribuyéndole un valor mayor–, pero estas correcciones son posibles sólo *después* de haber producido la escritura. De este modo, los ajustes efectuados por los sujetos antes citados representan una compensación local: ellos logran encontrar una solución más o menos satisfactoria reduciendo la cantidad de cifras, pero esta solución no funciona aún en forma anticipatoria, y por eso vuelven a enfrentarse con el conflicto frente a cada nuevo número que intentan escribir.

¿Cómo llegan los niños a encontrar una solución que les permita superar el conflicto planteado?

El proceso evidenciado por Nadia a lo largo de las dos entrevistas que tuvimos con ella, con un intervalo de quince días entre ambas, nos ayudará a responder a esta pregunta. Durante el primer encuentro, sus respuestas son similares a las de algunos sujetos que ya hemos citado:

Experimentador	Nadia
(Ella ha escrito antes convencionalmente 2000-4000-9000-10000, y ha producido otras escrituras -1000100 para mil cien y 1000500 para mil quinientos– estableciendo correspondencia con la numeración hablada.)	
¿Y novecientos cincuenta, ¿cómo lo escribirías?	(Se queda pensando, escribe 90050, mira largo rato su escritura.) ¡Me equivoqué!
¿Cómo es?	No sé.
¿Y novecientos cinco, cómo lo escribís?	Así (9005) o así (905).
¿De las dos maneras?	Para mí es así (señala 905).
¿Por qué a novecientos cinco le dejás un cero y a novecientos cincuenta le dejás dos?	Porque acá (90050) me equivoqué...Tiene que ser así: 9050. (Escribe 9048.)
¿Y novecientos cuarenta y ocho?	Mil.
Entre novecientos cuarenta y ocho y mil, ¿cuál es más?	
(Se juega con dinero. El experimentador pide a Nadia que le entregue tres mil aus-	

Experimentador	***Nadia***
trales, Nadia le da tres billetes de mil; luego le pide dos mil trescientos cincuenta australes, Nadia se los entrega correctamente.)	
¿Qué es más, dos mil trescientos cincuenta australes o tres mil?	¡Tres mil!
¿Cómo escribirías tres mil?	(Escribe 3000.)
¿Y dos mil trescientos cincuenta?	(Escribe 200030050.)
¿Por qué éste, que es menos, tiene tantos números?	¿Cómo que es menos?
Vos me dijiste antes que dos mil trescientos cincuenta es menos que tres mil.	No, no sé. (Está muy preocupada, piensa largo rato.) Sí.
¿Tenés un grave problema?	
¿Cuál es tu problema?	Que no entiendo nada. .(Se ríe.) ... Pero esto es muy raro... porque mirá (señalando en su escritura anterior) 2000 300 50 dos mil trescientos cincuenta
A mí me parece que vos entendés un montón	Para mí no (se ríe).
Ajá, ¿se escribe así?	Porque no tengo otra forma de escribirlo... por ahora lo escribo así.
Entonces a vos te parece que no es así, pero como no tenés otra forma, lo escribís así.	Claro.
¿Y cómo te parece que será? ¿Con más números o con menos?	Con menos.
¿Con cuántos números te parece?	Tres... cuatro... algo así.
¿Más o menos como cuál?	Como éste (señala 9000, después de haber revisado sus escrituras anteriores).

Puede observarse que Nadia ha comenzado a “achicar” sus escrituras: en el caso de novecientos cinco, ella propone desde el comienzo dos posibilidades, una de las cuales está en correspondencia con la numeración hablada, en tanto que la otra –la que finalmente elige y que coincide con lo convencional– tiene un cero menos. Después de corregir en este mismo sentido su escritura original de novecientos cincuenta, ella produce directamente 9048 para novecientos cuarenta y ocho, omitiendo esta vez en *forma anticipatoria* el otro cero (de novecientos) que seguramente hubiera incluido si no estuviera tratando de controlar sus escrituras para que incluyeran menos cifras de las que resultan al establecer correspondencia con la numeración hablada. Sin embargo, la anticipación con respecto a la supresión de ceros deja de operar cuando se trata de escribir dos mil trescientos cincuenta. Es más: aunque acaba de afirmar (en relación con los australes) que tres mil es mayor que dos mil trescientos cincuenta, ella parece “olvidar” esta afirmación cuando el experimentador la vincula a la cantidad de cifras de sus escrituras y pregunta sorprendida: “¿Cómo que es menos?”.

A pesar de ese “olvido”, Nadia está en condiciones de reconocer que se está enfrentando con un serio problema, con un problema que tarde o temprano tendrá que resolver y que la llevará a modificar su conceptualización de la escritura numérica. La conciencia que ella tiene de la provisoriedad del conocimiento (“*por ahora* lo escribo así”) es francamente notable.

Aunque esta vez ella no corrige su escritura (200030050), sus respuestas finales indican que sabe en qué dirección habría que corregirla: se trata de lograr que esa escritura tenga sólo cuatro cifras. ¿Cómo hacerlo?

Este es el problema que queda planteado al final de la primera entrevista y Nadia seguirá reflexionando sobre él en nuestra ausencia. En efecto, al iniciarse el segundo encuentro, ella señala:

Experimentador	***Nadia***
¿Por qué creés que te equivocaste?	El otro día hice todo mal, me equivoqué mucho.
¿Cómo te diste cuenta de que doscientos cinco es así? (205)	Porque en los números altos, por ejemplo el doscientos..., el doscientos cinco suponéte, yo lo hice así: 2005, y lo tenía que hacer así: 205.
¿Y doscientos treinta y cinco cómo es?	Después pense que me equivoqué... No sé cómo explicar.
¿No va ningún cero en el doscientos treinta y cinco?	235 (escribe el cero y encima el tres).
¿Puede ser que el otro día lo hayas escrito así: 2035?	No.
	Sí.
¿Y el otro día, por qué te parecía que iba con cero?	No sé.
¿Novecientos cincuenta y ocho cómo lo escribís?	958.
	No.
¿No lleva ceros? ¿Ningún cero?	(Escribe 9050, lo tacha, luego escribe 900 y pone un cinco sobre el último cero.) 905
¿Y novecientos cinco?	
¿Por qué acá (905) sí lleva cero y acá (958) no lleva cero?	Porque acá (905) es cinco y acá (958) cincuenta y ocho... Porque cincuenta y ocho son dos números y cinco es uno.
¿Y qué pasa si a éste (905) no le pongo ningún cero?	Si no le pongo ningún cero, es noventa y cinco. Hay que ponerlo para que se sepa que es novecientos cinco.
[...]	2500. (Escribe primero 2000 y luego el 5 sobre el primer cero.)
Y el dos mil quinientos, ¿cómo será?	No sé.
Contáme cómo lo pensaste.	2058 (escribe primero 2000 y luego, sobre los ceros, 5-5 y 8).

Experimentador	*Nadia*
¿Y el dos mil quinientos cincuenta y ocho? ¡Qué bárbaro! Explícame cómo lo hacés, así yo se lo cuento a otros nenes. Ese método que usaste puede servirles a otros chicos.	 Primero pongo dos mil, y después voy poniendo... Pongo. quinientos cincuenta y ocho, porque si me equivoco y pongo un cero me queda suelto.

Nadia ha elaborado una estrategia que le permite superar el conflicto planteado: ella puede ahora -a diferencia de lo que ocurría en la sesión anterior– anticipar con exactitud la cantidad de cifras que tendrá el número solicitado. Esta anticipación parece hacerse posible gracias a una resignificación de la relación entre la escritura de los nudos y la de los números ubicados en los intervalos entre ellos.

En efecto, las últimas producciones de Nadia se apoyan –como las anteriores– en la escritura convencional de los nudos (900 o 2000 en este caso), pero la forma en que se utiliza esta apoyatura ha variado radicalmente: en tanto que antes se yuxtaponían los símbolos correspondientes a las partes de la denominación oral del número (2000 300 50, por ejemplo) –y se hacían luego correcciones para "achicar" el numeral resultante–, ahora la escritura del número se usa como un modelo útil para fijar la cantidad de cifras que debe tener el número a representar y luego se "rellena", sustituyendo los ceros por los números correspondientes.

Notemos que Nadia ha descubierto la posibilidad de usar de otra manera una información que ya tenía. ¿Por qué la ha descubierto en este momento y no antes? Porque esta posibilidad adquiere sentido –creemos– cuando se constituye en el instrumento que permite resolver un conflicto del cual se ha tomado conciencia. La utilización de la escritura del nudo como modelo para la de otros números aparece precisamente cuando Nadia se está preguntando cómo hacer para reducir la cantidad de cifras de sus escrituras y, más precisamente aún, cómo hacer para reducirlas a la misma cantidad de cifras que corresponde a los nudos entre los cuales están comprendidos los números que intenta representar.

Ahora bien, cuando Nadia anticipa que la escritura de dos mil trescientos cincuenta tendrá cuatro cifras, seguramente no se basa sólo en el conocimiento específico de que dos mil se escribe con esa cantidad de cifras, sino también en una conclusión más general que ella –como muchos otros sujetos– ha elaborado a partir de la información provista por la escritura convencional: los cientos van con tres, los miles van con cuatro.

En síntesis, las escrituras que se corresponden con la numeración hablada entran en contradicción con las hipótesis vinculadas a la cantidad de cifras de las notaciones numéricas. Tomar conciencia de este conflicto y elaborar herramientas para superarlo parecen ser pasos necesarios para progresar hacia la notación convencional.

Hemos intentado describir los rasgos esenciales del proceso a través del cual los niños se aproximan a comprender la naturaleza de nuestro sistema de numeración; hemos mostrado que los chicos producen e interpretan escrituras convencionales mucho antes de poder justificarlas apelando a la ley del agrupamiento recursivo; hemos puesto en evidencia conceptualizaciones y estrategias que los chicos elaboran en relación con la notación numérica.

Es una opción didáctica tener en cuenta o no lo que los chicos saben, las preguntas que se hacen, los problemas que se plantean y los conflictos que deben superar. Es también una decisión didáctica tomar en consideración la naturaleza del objeto de conocimiento y valorar las conceptualizaciones de los chicos a la luz de las propiedades de ese objeto. La posición que en tal sentido hemos asumido inspira tanto el análisis de la relación existente entre las conceptualizaciones infantiles y el sistema de numeración como la crítica a la enseñanza usual y el trabajo didáctico que proponemos. De todas estas cuestiones hablaremos en los puntos siguientes.