Aportes para el desarrollo curricular

2001

MATEMÁTICA

ACERCA DE LOS NÚMEROS DECIMALES: UNA SECUENCIA POSIBLE

Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires
Secretaría de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

ISBN 987-9327-95-0

Hecho el depósito que marca la Ley nº 11.723

Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula
Bartolomé Mitre 1249 . CPA c1036aaw . Buenos Aires
Teléfono: 4375 6093 . teléfono / fax: 4373 5875
e-mail: dircur@buenosaires.esc.edu.ar

GOBIERNO DE LA CIUDAD AUTÓNOMA DE BUENOS AIRES

Jefe de Gobierno
DR. ANÍBAL IBARRA

Vicejefa de Gobierno
LIC. CECILIA FELGUERAS

Secretario de Educación
LIC. DANIEL F. FILMUS

Subsecretaria de Educación
LIC. ROXANA PERAZZA

Director General de Educación de Gestión Privada
PROF. MARCELO PIVATO

Directora General de Planeamiento
LIC. FLAVIA TERIGI

Directora General de Educación
HAYDÉE CHIOCCHIO DE CAFFARENA

Directora de Currícula
LIC. SILVIA MENDOZA

Aportes para el desarrollo curricular

Coordinación general: Susana Wolman

Matemática
Acerca de los números decimales: una secuencia posible

Autores
Claudia Broitman
Horacio Itzcovich
María Emilia Quaranta

Coordinación del proyecto y supervisión académica
Patricia Sadovsky

La edición de este texto estuvo a cargo de la Dirección de Currícula.

Coordinación editorial: Virginia Piera.
Diseño gráfico y supervisión de edición: María Victoria Bardini, María Laura Cianciolo, Laura Echeverría, Gabriela Middonno.

Índice

Presentación

En 1994 se inició desde la Dirección de Currícula el proceso de actualización curricular. Este proceso sostenía la singularidad del Sistema Educativo del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires y reafirmaba la vigencia del *Diseño Curricular para la Educación Primaria Común* de 1986 asumiendo la tarea de actualizarlo y mejorarlo para que respondiera a:

- La necesidad de optimizar el *Diseño Curricular* como instrumento de trabajo para el docente.
- Los requerimientos que surgen de la Ley Federal de Educación, incluyendo los Contenidos Básicos Comunes.
- Los avances producidos en las didácticas de las áreas.

Los textos editados[1] debían cumplir –y cumplen aún– la función de constituirse en documentos de trabajo para los docentes ya que colaboran en incrementar las capacidades y los recursos de quienes participan del proceso de transformación curricular para acceder a sus fundamentos y evaluar su desarrollo.

Como producto de todo ese proceso de actualización curricular[2] en 1999 se elaboró el *Pre Diseño Curricular* para EGB 1 y 2. Su presentación al Sistema Educativo se realizó a través de encuentros destinados a supervisores, directivos y docentes de toda la jurisdicción coordinados por integrantes de los equipos que intervinieron en su formulación. Actualmente continúa su difusión en las escuelas a través de la participación de los miembros de las distintas áreas en las Jornadas de Organización Institucional, a solicitud de las instituciones interesadas.

Durante el año 2000 los integrantes de los equipos de la Dirección de Currícula planificaron y llevaron a cabo distintas acciones con el objetivo de elaborar aportes que permitieran tender un puente entre lo formulado en el *Pre Diseño Curricular* y su concreción en el aula: elaboración de propuestas didácticas –algunas se realizaron en las aulas con la colaboración de los docentes de las escuelas–, relevamiento de experiencias que ya se desarrollaban y talleres de escritura con docentes. Estas acciones culminaron con la elaboración de los documentos que integran la serie que hoy presentamos.

La intención que orientó la elaboración de estos documentos es la de colaborar con los docentes de la Ciudad de Buenos Aires en el proceso de apropiación y puesta en práctica del *Pre Diseño Curricular* como instrumento de trabajo profesional. Estos documentos, por lo tanto, intentan facilitar y enriquecer una creciente vinculación de los docentes con las formulaciones allí vertidas.

[1] Aproximadamente 40 documentos de actualización curricular.
[2] Puede consultarse el disco compacto "Documentos de actualización y desarrollo curricular" y el catálogo que reúne una síntesis de toda la producción, ambos editados por la Dirección de Currícula, entregados oportunamente a las escuelas.

Anticiparemos brevemente el contenido de los documentos de cada una de las áreas para facilitar una visión de conjunto de la serie.

Artes

Se presentan documentos de Música, Plástica y Teatro que contienen propuestas y proyectos diseñados y puestos en marcha por docentes de distintas escuelas de la jurisdicción. Estas experiencias se relevaron a través de entrevistas con docentes, directivos y supervisores con la intención de elaborar documentos que permitieran difundirlas.

En los documentos se presenta, además, una propuesta de organización de la tarea –ilustrada a través de proyectos realizados– y se analizan diversos aspectos que posibilitan la puesta en marcha de las propuestas didácticas.

Los autores de *Música en la escuela: proyectos para compartir* y *Plástica en la escuela: proyectos para compartir* esperan que quienes han decidido "ir más allá" se sientan reconocidos en las experiencias que se presentan, y que quienes piensan "en mi escuela o con mis chicos no se puede" comiencen a imaginar que algunos caminos no son utópicos.

El documento *Teatro en la escuela: proyectos para compartir* se elabora teniendo en cuenta la inclusión de este lenguaje artístico en el *Pre Diseño Curricular* y considerando oportuno difundir prácticas que, de una manera u otra, tomaron ese desafío o enriquecieron las preexistentes. Se presentan algunos proyectos que muestran distintas alternativas para la inclusión del teatro en las escuelas y se reflexiona sobre las condiciones de posibilidad.

Ciencias Naturales

Se expone en *Las fuerzas y el movimiento* el desarrollo de una propuesta de trabajo para el segundo ciclo (4º grado) destinada a la enseñanza de contenidos que se vinculan con el bloque "Las fuerzas y el movimiento" formulado en el *Pre Diseño Curricular* EGB 2. La elección de este bloque se debe a que es poco frecuente el trabajo de sus contenidos en la escuela, por lo cual los integrantes del área se propusieron abordar algunos de estos temas junto con los docentes que llevaron esta propuesta al aula. El enfoque que da marco a este documento sostiene un tratamiento de estos contenidos relevantes de la Física desde una perspectiva descriptiva y cualitativa de los fenómenos, e incluye un trabajo con procedimientos propios del área como la experimentación y el registro de datos. El documento procura comunicar esta experiencia realizada en las escuelas y así extenderla a otros maestros.

Ciencias Naturales e Informática

El documento *Un trabajo compartido entre Ciencias Naturales e Informática: Termómetros y temperaturas. Organización y representación de datos*, relata y analiza una experiencia didáctica realizada por docentes de 5° grado junto con integrantes de los dos equipos. El desarrollo de la propuesta de trabajo responde a contenidos de estas dos áreas. Acorde con lo formulado en el *Pre Diseño Curricular* se incorpora la Informática como herramienta para promover los aprendizajes. Se seleccionaron contenidos de Ciencias Naturales del bloque "Los materiales", específicamente "las interacciones entre los materiales y el calor", cuyo tratamiento plantea una perspectiva que incluye la experimentación. Informática propone trabajar en este proyecto en la organización y la representación de la información apoyándose en la planilla de cálculo. La experiencia se realizó con alumnos que no tuvieron aproximaciones previas a esta herramienta informática. Se ilustra de esta manera la idea de que el aprendizaje conceptual de esta tecnología implica un camino de apropiación generado por necesidades y usos. En el documento se hace explícita la intención de orientar nuevas planificaciones que incorporen gradualmente las propuestas del *Pre Diseño Curricular*.

Ciencias Sociales

Se presenta el documento *Una experiencia de Historia Oral en el aula: las migraciones internas en la Argentina a partir de 1930.* En él se describen y analizan diferentes situaciones de una secuencia de enseñanza implementada en un

6º grado sobre el tema "Migraciones internas"; es decir, la afluencia de personas de provincias argentinas a Buenos Aires a partir de 1930. Tanto en el desarrollo de la experiencia como en su análisis, se intentó especificar algunas propuestas para la enseñanza de las Ciencias Sociales del *Pre Diseño Curricular para la EGB, Segundo ciclo*. Por un lado, se pretendió avanzar en el conocimiento sobre el uso de la Historia Oral en la enseñanza; por otro, se procuró explorar modos de concretar en el aula la enseñanza de conceptos sociales. El documento presenta los avances logrados en estas cuestiones, en relación con algunos de los resultados obtenidos; asimismo incluye testimonios orales y textos que pueden utilizarse para la enseñanza de las "Migraciones internas".

Conocimiento del Mundo

Se elaboraron tres documentos con propuestas de trabajo para esta área:
Viviendas familiares para primer grado, que brinda algunas actividades desde las cuales los alumnos puedan acercarse a la comprensión de la realidad social de las diversas organizaciones familiares. Abarca temas como: las viviendas familiares en distintas partes del mundo, del pasado en Buenos Aires, las cocinas de antes y de ahora, los espacios en las viviendas y sus funciones.
Juegos y juguetes para segundo grado, que abarca temas como: juegos de distintas partes del mundo, juegos y juguetes del pasado y del presente, ¿cómo se eligen los juguetes?, normas para jugar, los conflictos y su resolución en situaciones de juego, los juegos y el movimiento.
Las plazas de la Ciudad de Buenos Aires para tercer grado, que incluye distintos aspectos a ser desarrollados como: la diversidad de plantas de la plaza; la organización y diferentes usos de las plazas de acuerdo con su ubicación dentro de la Ciudad y sus características físicas e históricas; e historias de las plazas.

Cada uno de estos documentos contiene, además de una serie de variadas actividades para desarrollar, cuadros con las ideas básicas y los alcances de contenido que están involucrados, así como un anexo con una selección de fuentes de información y de materiales para facilitar su puesta en práctica.

Educación Física

Se presentan cuatro documentos: *Experiencias y reflexiones acerca del juego y el "saber jugar"*, *La enseñanza de contenidos de la Educación Física en diversos ámbitos, Reflexiones sobre propuestas de enseñanza*, que incluyen trabajos elaborados por docentes de escuelas de nuestra jurisdicción; algunos fueron seleccionados entre los que se enviaron a la Dirección de Currícula y otros fueron elaborados por profesores que asistieron a un taller coordinado por los especialistas del área en el cual se propuso revisar el sentido de lo que se enseña en Educación Física.
El documento que integra dos trabajos: *La planificación docente en Educación Física* y *La relajación, ¿es una capacidad natural o un contenido por enseñar?* fue elaborado por los miembros del equipo. En el primero se plantea una revisión del sentido de la planificación como organizadora de las prácticas, como un instrumento adecuado para la previsión de la tarea docente y se reflexiona sobre algunos criterios para su elaboración y organización. El segundo tiene por objeto esclarecer cuestiones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la relajación y aporta fundamentos, reflexiones y estrategias que enriquecen la tarea del docente.

Educación Tecnológica

El documento *La hilatura como proceso técnico* presenta una experiencia de desarrollo curricular destinada a ilustrar el modo de llevar al aula uno de los contenidos propuestos en el *Pre Diseño Curricular para la EGB, Segundo Ciclo*: el proceso de hilado. La elección de este tema permitió abordar un contenido poco trabajado en general, y cuyo tratamiento pone de manifiesto la relación existente entre las propiedades de los materiales, las operaciones y las tecnologías empleadas, así como la necesidad de obtener transformaciones eficaces que permitan la obtención de hilo. Se señala además la importancia de la planificación, se formula una reflexión acerca del sentido de elegir un tema para el desarrollo del área, se transcriben y analizan fragmentos de lo acontecido en el aula.

Formación Ética y Ciudadana

Presenta una producción en cuatro documentos. Uno de ellos, *"Guía para elaborar proyectos transversales de 4° a 7° grado"*, pretende orientar a docentes y directivos en el diseño de *proyectos transversales* que el área propone como una de las modalidades de inserción curricular para segundo ciclo. Allí se define el sentido de lo que se considera "proyecto" y se ejemplifica con el planteo de tres casos hipotéticos de formulación de proyectos transversales en escuelas. Se intenta de esta manera mostrar el proceso de definición que podría desarrollarse en cualquier institución. El objetivo es facilitar la discusión de algunos criterios que conviene tener en cuenta al elaborar un proyecto de Formación Ética y Ciudadana.

Los otros tres, *Propuestas de enseñanza para Segundo ciclo*, contienen un abanico de actividades especialmente diseñadas para la propuesta curricular del área. En todas ellas, la preocupación central es suscitar cambios en las prácticas morales y cívicas, a partir de procesos de reflexión ética y política, del reconocimiento de derechos y responsabilidades en la vida social. Las situaciones presentadas se sustentan en algún tipo de conflicto moral, que desnaturaliza las respuestas habituales y promueve una reflexión sobre distintas alternativas.

Matemática

El documento *Acerca de los números decimales: una secuencia posible* presenta el desarrollo curricular sobre la enseñanza de los números decimales en segundo ciclo, específicamente se llevó a cabo en varios 5º, aunque también se realizó la primera parte en 4º y la secuencia completa en 6º. Los contenidos que se trabajan en esta secuencia son: equivalencias utilizando escrituras decimales en contextos de dinero y medida, relaciones entre escrituras decimales y fracciones decimales; análisis del valor posicional en las escrituras decimales, relación entre el valor posicional de los números decimales y la multiplicación y la división seguida de ceros. Se encontrarán los procedimientos de resolución de los alumnos y los conocimientos que involucran cada uno de ellos, la variedad de notaciones producidas, fragmentos de momentos de las interacciones colectivas promovidas por los docentes y la evolución de los conocimientos a lo largo del transcurso de la secuencia.

Prácticas del Lenguaje

Presenta documentos en los que se analizan algunos de los momentos de la puesta en práctica en escuelas de la Ciudad de una secuencia didáctica para primer grado centrada en la lectura literaria –en particular, en la lectura de distintas versiones de cuentos clásicos.

Leer y escribir en el Primer ciclo. Yo leo, tú lees, él lee... incluye el análisis y la reflexión con los docentes que participaron en la experiencia de "los detalles" del momento de la secuencia en el que se propicia la lectura de cuentos por parte del maestro: ¿qué cuentos se eligen?, ¿se cambian las palabras difíciles?, ¿qué se hace después de leer?, ¿se prevé leer algunas veces los mismos cuentos?, y ¿qué se les enseña a los chicos cuando se les leen cuentos? También abarca un capítulo en el que se plantea el análisis de la propuesta que facilita la interacción directa de los niños con libros que circulaban en el aula: la exploración de los libros, la elección de los cuentos, las intervenciones de las maestras, el trabajo en pequeños grupos y la lista de los cuentos.

En *Leer y escribir en el Primer ciclo. La encuesta* se analiza el desarrollo de la situación en la que se les brinda a los niños oportunidades de leer textos –títulos de los cuentos que las maestras estaban leyendo en clase– que no estaban directamente relacionados con imágenes a partir de las cuales pudieran anticipar su significado, y de atreverse a hacerlo –como encuestadores– sin saber leer aún en el sentido convencional del término.

Cada documento recoge alguno de los momentos de la secuencia didáctica desarrollada y en ambos se pueden encontrar las voces de los maestros y de los niños.

Introducción

A través de este documento queremos comunicar un proyecto de desarrollo curricular sobre la enseñanza de los números decimales en el segundo ciclo de la Educación General Básica, llevado a cabo a lo largo del ciclo lectivo 2000, en el marco de un conjunto de acciones organizadas desde la Dirección de Currícula con miras a la difusión de los Pre Diseños Curriculares.

Esta experiencia ha consistido en la elaboración de una propuesta para la enseñanza de los números decimales que busca, por un lado, anclar las opciones básicas del enfoque para la enseñanza de las matemáticas que sostiene el *Pre Diseño Curricular*[1] y, por otro lado, desplegar un trabajo didáctico sobre algunas aristas de los números decimales.

Diversas tareas han configurado este proyecto:
- Diseño por parte del equipo de Matemática de una secuencia didáctica.
- Reuniones de trabajo con los grupos de docentes, destinadas al análisis de diferentes aspectos y dificultades involucrados en la enseñanza de los números decimales y al análisis y revisión de la secuencia didáctica elaborada.
- Implementación de la secuencia en los quintos grados de diferentes escuelas, observación y registro de las clases; y análisis de la tarea realizada con los maestros que la llevaron a cabo.
- Análisis de los registros de clases y las producciones de los alumnos recolectadas, y elaboración del presente documento.

De este modo, se ha buscado adecuar la propuesta de acuerdo con las condiciones reales de la enseñanza de nuestras escuelas, las planificaciones de los maestros, sus preocupaciones, etc., intentando elaborar un recurso que, por tener en cuenta el contexto en el cual se implementa, resulte viable y enriquezca la tarea de docentes y alumnos.

Como puede imaginarse, la participación en semejante tarea supuso un trabajo muy arduo por parte de todos los maestros que nos acompañaron, dispuestos a estudiar, analizar y revisar las propuestas ofrecidas, llevar a cabo la secuencia diseñada, exponerse a la "mirada" de otros, al mismo tiempo que se reflexionaba sobre las propias prácticas. Su invalorable participación hace posible que podamos ahora compartirlo con todos los colegas de la Ciudad de Buenos Aires.

Por ello, queremos agradecer, en primer lugar, a todos los supervisores y directivos de las escue-

[1] Algunos aspectos que se destacan en el *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Marco General* para la enseñanza del área, en el *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Segundo ciclo* y en los *Documentos de Actualización Curricular* son los siguientes: el papel de la resolución de problemas, el análisis del contenido, las diferentes interacciones que es necesario promover en las clases, la diversidad de intervenciones requeridas según los momentos del trabajo didáctico, etc. Remitimos a dichos textos para profundizar acerca del enfoque didáctico que sustenta el presente proyecto.

las involucradas. Nuestro agradecimiento a todos los maestros y directivos que participaron de las jornadas de análisis y preparación de la secuencia didáctica, muchos de los cuales las han llevado a cabo en sus escuelas y han presentado producciones de sus alumnos, entre ellos:

Sandra Cardoso; Dora Cohen; Claudia M. Herrera; Mónica Monzón; Diana Ocen; Mariel Piazze e Inés Waisberg. (Escuela n° 20, Distrito Escolar II.)
Lucía Bajo Alonso y M. Rosa Blanca. (Escuela n° 3, Distrito Escolar III.)
Diana Laniado y Liliana Nores. (Escuela n° 11, Distrito Escolar III.)
Ana M. Feoli; Jorge A. Gabetta y Stella M. Miró. (Escuela n° 15, Distrito Escolar III.)
Elsa Lusquiños. (Escuela n° 18, Recuperación Distrito Escolar XVIII.)
Adriana Achin y Ana M. Rigoni. (Escuela n° 4, Distrito Escolar IX.)
Marta Fernández. (Escuela n° 3, Distrito Escolar XVII.)
Liliana Fontana; Mirta Gómez y Mónica Marcó. (Escuela n° 13, Distrito Escolar XVIII.)
Laura Mariconda. (Escuela nº 5, Distrito Escolar XVII.)
Susana Bustos y Marta Scarpatti. (Escuela nº 7, Distrito Escolar IX.)
Josefina Isabel Cercelli. (Escuela nº 2, Distrito Escolar XIV.)
María Inés Villalba. (Escuela nº 20, Distrito Escolar X.)

Y, en especial, nuestro reconocimiento a aquellos docentes, que, además de participar de los encuentros, nos abrieron las puertas de sus aulas para observar el desarrollo de la secuencia, nos permitieron analizar y difundir las producciones de sus alumnos, nos entregaron informes y registros de las clases que ellos conducían, materiales que hoy forman parte de este documento.

Adela Blazek. (Escuela n° 20, Distrito Escolar II.)
M. Cecilia Naveiro y Silvia Oettel. (Escuela n° 9, Distrito Escolar III.)
Marcela Rebolo. (Escuela de Recuperación nº 9 y Escuela nº 23, ambas en el Distrito Escolar IX.)
Marcela Gutiérrez. (Escuela II, Distrito Escolar XIV.)
Stella Maris Africano, Susana Barbieri y María Graciela Fernández. (Escuela nº 17, Distrito Escolar XV.)[2]

¿Por qué elegimos trabajar sobre este contenido en particular?

Principalmente porque contamos con pocas propuestas de enseñanza de los números decimales que puedan circular y transferirse fácilmente al trabajo escolar. También nos parecía pertinente mostrar la complejidad que representan estos números –nuevos para los alumnos de este nivel– y la necesidad de abordar dicha complejidad en una ampliación y profundización a largo plazo.

La secuencia propuesta aborda algunos aspectos vinculados a los números decimales y consta de aproximadamente trece clases para 5° grado de la Educación General Básica.[3] No pretende de ningún modo cubrir exhaustivamente todos los contenidos correspondientes a la enseñanza de este tema[4] dado que involucran una complejidad de relaciones sólo tratables a largo plazo.

[2] También agradecemos a Carolina Rovira del Instituto Valle Grande por abrirnos la puerta de su aula para una exploración inicial de esta secuencia.
[3] Si bien se sugiere para 5º grado, hemos realizado la primera parte de la misma también en 4º año y la secuencia completa en 6º año.
[4] Para orientaciones sobre la enseñanza de dichos contenidos se remite al apartado "Las expresiones decimales", en *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Segundo ciclo,* “Matemática”, *op. cit.*

Contenidos que se abordan

Los contenidos que se trabajan en esta secuencia son:

- Equivalencias utilizando escrituras decimales en contextos de dinero y medida.[5]
- Relaciones entre escrituras decimales y fracciones decimales.
- Análisis del valor posicional de las cifras en las escrituras decimales.
- Relación entre el valor posicional de los números decimales y la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros.

Se mencionan a continuación algunos contenidos centrales referidos a los números decimales en el segundo ciclo que no corresponden a los objetivos de esta secuencia:

- Relaciones de orden entre números decimales y representación en la recta numérica. Análisis de las diferencias con los números naturales, la densidad como propiedad específica del campo de los números racionales.
- Estrategias diferentes de cálculo y construcción de los algoritmos convencionales para las operaciones con números decimales.[6]

Para estos contenidos, se requerirá pues de otras actividades.

[5] Para analizar de modo más general las cuestiones relativas al estudio de los números decimales a partir del manejo del dinero, y a la insuficiencia de este contexto para abordar cuestiones centrales de este conjunto numérico, remitimos al lector al apartado "Las expresiones decimales", en *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Segundo ciclo,* “Matemática”, *op. cit.*
Con respecto a las "complejas relaciones" entre matemática y vida cotidiana remitimos a la lectura del *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Marco General, op. cit.*

[6] En realidad, esta secuencia sí pone en juego diversas estrategias de cálculo aunque éstas no constituyen aquí el objeto de enseñanza. Dichas estrategias podrán retomarse luego en actividades cuyo objetivo específico sea el cálculo.

Diferentes fases de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica se encuentra organizada en cuatro partes:

PRIMERA PARTE | Consta de un conjunto de problemas dentro del contexto del dinero. Remitir al dinero como punto de partida presenta la ventaja de relacionar el trabajo que se pretende iniciar con prácticas sociales extraescolares de mucha familiaridad para los alumnos. Por ello, dichos conocimientos externos a la matemática permiten anticipaciones y controles sobre los cálculos matemáticos que los niños realizan. A su vez, permiten una diversidad de procedimientos y movilizan los conocimientos de los cuales disponen los alumnos. Esto se muestra a lo largo de esta primera parte, a partir de problemas que los niños pueden resolver refiriéndose exclusivamente al dinero. Se intenta luego profundizar en el análisis del significado de las notaciones decimales. La potencialidad del contexto, en este caso, reside en que permite tender un puente entre las relaciones que se establecen a partir de las prácticas sociales (por ejemplo, el conocimiento del valor de las diferentes monedas y sus equivalencias) y aquellas que son internas a la matemática (por ejemplo, la comprensión del significado de las notaciones decimales: el lugar después de la coma es de los décimos, o diez centésimos equivalen a un décimo, etcétera).[7]

SEGUNDA PARTE | Se extiende el trabajo realizado en la primera parte a un nuevo contexto: la medida, también práctica social pero mucho menos familiar que la primera. Los nuevos problemas que aquí se presentan obligan a los niños a recurrir a nuevos conocimientos matemáticos: concebir los decímetros, centímetros y milímetros como décimos, centésimos y milésimos de metro y la relación entre las diferentes unidades.

TERCERA PARTE | Aquí se trabaja con composiciones aditivas de los números decimales intentando que los alumnos, a partir de los conocimientos construidos inicialmente en contextos particulares como el dinero y la medida, puedan "despegarse" de ellos y analizar ciertos aspectos internos de su funcionamiento: significado de las diferentes posiciones de las cifras en las notaciones decimales, relaciones entre esas diferentes posiciones.

[7] Desde hace tiempo sabemos que, aunque los niños no han estudiado aún los números decimales, pueden desplegar una variedad de estrategias para resolver los problemas que se les plantean. Con respecto al cálculo con dinero, estos conocimientos implican la posibilidad de comparar cantidades, establecer equivalencias y realizar cálculos mentales exactos y aproximados.
Acerca de la importancia de establecer en el aula "puentes" entre los conocimientos informales de los niños y los conocimientos que la escuela intenta enseñar, se sugiere la lectura de Ferreiro, E. (1986); Carraher, T.; Carraher, D., y Schliemann, A. (1991). Para la importancia de abordar diferentes estrategias de cálculo mental, se recomienda la lectura de Parra, C. (1994).

CUARTA PARTE | Por último, se busca extender la progresiva descontextualización que se viene llevando a cabo a lo largo de toda la secuencia, hacia el trabajo de las relaciones multiplicativas subyacentes a las escrituras decimales.

¿QUÉ CONTIENE ESTE DOCUMENTO?

El documento comprende cada una de las cuatro partes de la secuencia didáctica seguida de un análisis de su desarrollo en el aula.[8] Este último contempla:

- La variedad de procedimientos de resolución por parte de los alumnos que posibilitan los problemas planteados, y los conocimientos que involucran cada uno de ellos.
- La variedad de notaciones producidas por los alumnos. Muchas de ellas, aunque no se corresponden con la notación convencional, muestran que los alumnos comprenden y, en consecuencia, controlan lo que realizan en sus resoluciones y las respuestas obtenidas.
- Momentos de las interacciones colectivas promovidas por los docentes que dan lugar a formulaciones y argumentaciones en las que los alumnos explicitan y fundamentan conocimientos "puestos sobre la mesa" en las resoluciones. Asomarnos a fragmentos de estos momentos de las clases nos permite vislumbrar la importancia de la organización y la conducción de instancias de discusión con todos los alumnos.
- Momentos de trabajo en los cuales el docente interviene para destacar conclusiones que recuperan conocimientos puestos en juego en dirección al saber que se intenta enseñar.
- La evolución de los conocimientos de los alumnos a lo largo del transcurso de la secuencia. Dentro de esta evolución, también nos interesa mostrar cómo las construcciones de los primeros tramos de la secuencia se vuelven referencias para el trabajo posterior, poniendo de manifiesto el carácter de secuencia, es decir, la articulación que guardan los problemas entre sí.

Estas "instantáneas del aula" nos muestran primeras realizaciones de la secuencia, que pueden ser revisadas y mejoradas en sucesivos desarrollos.

[8] Al final del documento, se presenta un anexo que contiene exclusivamente los problemas que componen la secuencia.

Primera parte

EQUIVALENCIAS CON DINERO

TIEMPO PREVISTO: TRES O CUATRO CLASES

Contenidos

- Reconstrucción de una cantidad de dinero usando monedas de determinada clase.
- Escritura de expresiones que representen las equivalencias entre cantidades.
- Inicio en el análisis de la información contenida en la notación decimal.

Se presenta a los alumnos el siguiente problema, que tiene por objetivo que realicen composiciones y descomposiciones de cantidades de dinero utilizando diferentes monedas y estableciendo equivalencias entre ellas. Las equivalencias permiten poner en juego primeras relaciones entre pesos y centavos que se constituirán en el punto de partida para estudiar las relaciones entre enteros, décimos y centésimos.

PROBLEMA 1
(parte a)

Con monedas de los siguientes valores: $1; 50c; 25c; 10c; 5c; 1c, escribí tres maneras de pagar $3,75.
(Se pueden usar varias monedas del mismo valor.)

Luego de que los alumnos trabajan, aproximadamente durante cinco minutos, en parejas para resolverlo, se organiza una fase de trabajo colectivo en la que se comparan algunas de las diferentes posibilidades de resolución.

A continuación, se propone un trabajo individual sobre el siguiente problema que incorpora un primer análisis de la escritura decimal:

PROBLEMA 1
(parte b)

Anotá dos o tres maneras diferentes de formar: $0,87 y $2,08.

Luego del trabajo individual, se propone un breve análisis colectivo de las diferentes maneras de componer las cantidades que hayan aparecido, incluyendo los posibles errores.

Se enfatizarán aquellos procedimientos en los que se realizan transformaciones a partir de alguna solución ya propuesta, en particular de composiciones o descomposiciones de algunos números de tal manera que no sea necesario volver a sumar todas las monedas.

Para 2,08 es posible que algunos alumnos sugieran conformarlo a partir de dos monedas de 1 peso y ocho de 10 centavos (si no apareciera este error el maestro podría preguntar si es posible formar 2,08 con dichas monedas). El docente podría proponer entonces obtener 2,80. Confrontar ambas cantidades permitirá explicitar las diferencias.

Para el resto de las composiciones propuestas por los alumnos y ya anotadas en el pizarrón, se puede preguntar igualmente si podemos asegurarnos del mismo modo, sin hacer la cuenta, de que son correctas.

No se busca la exhaustividad de composiciones posibles, sino la justificación de las soluciones propuestas en términos del análisis de las equivalencias entre unas y otras.

Para iniciar a los niños en el análisis del valor posicional, al finalizar esta actividad, el docente escribirá en el pizarrón 0,87 y preguntará a la clase cuál es la relación entre la cifra 8 y el hecho de que se pueden usar ocho monedas de 10 centavos para componer la cantidad. La intención es establecer con ellos la relación entre las cifras de cada posición de la escritura y la cantidad de monedas de 10 centavos y de 1 centavo que son necesarias para componer la cantidad.

También se podrán analizar las diferencias entre el 8 de 0,87 y el 8 de 2,08. Se espera que los niños puedan reconocer que en un caso se trata de monedas de 10 centavos, y en el otro, de monedas de 1 centavo.

A continuación se presentan los siguientes problemas que tienen por objetivos:
- producir la escritura en pesos de los centavos (10 centavos como $0,10; 25 centavos como $0,25; 50 centavos como $0,50; etc.);
- analizar el significado de dichas escrituras decimales, e iniciar el análisis de las equivalencias entre ellas.

PROBLEMA 2
(parte a)

Para resolver en parejas: "Si recibís un premio de quince monedas de 10 centavos, siete monedas de 25 centavos y trece monedas de 50 centavos, ¿cuánto dinero recibiste?".

Mientras los alumnos resuelven, el docente observa los diferentes procedimientos que puedan aparecer, en particular respecto a las conversiones en pesos.

Es posible que algunos alumnos respondan "975", otros "975 centavos", otros digan "9 pesos con 75 centavos" o que contesten "9 coma 75". Si se presenta la discusión entre los alumnos, el docente permitirá un primer debate en torno de las equivalencias.[9] De no ser así, se continúa con el siguiente problema.

PROBLEMA 2
(parte b)

"Un chico recibió otro premio con las siguientes monedas: doce de 10 centavos, dos de 1 peso, ocho de 1 centavo y tres de 25 centavos. Para saber cuánto había ganado hizo cálculos con la calculadora y obtuvo el siguiente resultado: 4,03. Sabemos que el resultado es correcto. ¿Qué cálculos pudo haber hecho para obtener en el visor de la calculadora ese número? Anotalos y verificalos con tu calculadora."

El problema "obliga"[10] a los niños a expresar en pesos las cantidades indicadas y, por lo tanto, a utilizar la coma. Es importante que el docente insista en que los alumnos anoten los cálculos que hay que hacer con la calculadora, no los que harían con cuentas "a mano".

Si hubiera diferentes propuestas para una misma cantidad, se someterán a la discusión del conjunto de la clase. Se espera que el docente "pilotee" una discusión con los alumnos en torno de posibles dificultades que los niños hayan tenido al resolver el problema:

[9] Es común que los alumnos consideren que la parte entera corresponde a una unidad (los pesos) y la parte decimal, a otra (los centavos). De este modo, el número decimal es pensado como dos números naturales separados por una coma. Con esto se relaciona también la dificultad encontrada a veces para atribuir el signo $ a números menores que 1. Esta concepción se intentará poner en cuestión a lo largo de la secuencia trabajando sobre las relaciones entre las diferentes posiciones de las escrituras decimales. Reiteramos aquí los límites para abordar estas cuestiones sólo en el contexto del dinero.
[10] Sabemos que el alumno puede escapar a la "obligación" que plantea el problema. Lo que queremos decir es que las condiciones del problema fuerzan –aunque no garantizan– el uso de la escritura con coma.

- ¿Cómo se escribe en la calculadora 1 centavo? ¿Y 10 centavos?
- Si suman todo en centavos, ¿cómo anotan los dos pesos? ¿Cómo se anota un peso en centavos?
- ¿Cómo hacen cuando obtienen 403 centavos para que les quede 4,03?
- ¿Pudieron hacer todas las cuentas seguidas en la calculadora? ¿Tuvieron que anotar resultados parciales en una hoja?

Posteriormente se presenta a los alumnos el siguiente enunciado, para ser resuelto individualmente. El objetivo aquí es profundizar el análisis de la escritura decimal intentando que los alumnos encuentren la relación entre la escritura y el valor de cada moneda:

PROBLEMA 3

Si sólo tuvieras monedas de 10 centavos, ¿cuántas necesitarías para pagar justo estas cantidades?:
a) $1; b) $0,80; c) $2,20; d) $12,50; e) $4,25; f) $4,03; g) $0,05.

Se discute colectivamente la validez de las respuestas obtenidas por los alumnos. Si apareciera algún procedimiento de resolución basado en la interpretación directa sobre la escritura del número ("Te lo dice el número", "Te das cuenta mirando", etc.), se someterá a discusión para toda la clase. Si no apareciera, el docente podría proponerlo: "Algunos chicos dicen que se puede saber cuántas monedas hacen falta sin hacer cuentas. ¿Ustedes qué piensan?".

Una vez explicitada la regularidad, el docente preguntará a los alumnos: "¿Cómo hacen para estar seguros? ¿Ustedes creen que esto funcionará para todos los números?".

Se tratará de avanzar en el análisis de las razones por las cuales funcionan las reglas mencionadas tratando de identificar que, por cada peso, hay diez monedas de 10 centavos y, en consecuencia, si hay que armar 4 pesos, son necesarias cuarenta monedas; para 12 pesos, 120 monedas de 10 centavos, etcétera.

Se podrá analizar también cuándo se puede pagar con monedas de 10 centavos y cuándo no y por qué. Pedirles que piensen otras cantidades que sí se puedan pagar con monedas de 10 centavos y otras que no. Cuando los chicos responden que la cantidad debe terminar en cero para poder pagarla justo, se puede preguntar, por ejemplo, por $3,5.

Durante las discusiones se podrá ir recuperando la idea trabajada en torno del Problema 1, para relacionar las cifras de la escritura con la cantidad de monedas de 10 centavos y de 1 centavo que son necesarias para componer el número.

Se propone luego el siguiente problema que tiene por objetivo reconocer que 10 centavos equivalen a 1/10 del peso y 1 centavo, a 1/100 del peso, y analizar esta relación en las escrituras decimales. Puede ser planteado para que lo resuelvan por parejas. El docente presentará los diferentes ítemes a medida que los alumnos los vayan resolviendo.

PROBLEMA 4
(parte a)

Se quiere repartir $1 entre diez chicos, de manera que todos reciban la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?
- ¿Y si se quisieran repartir $2 entre diez?
- ¿Y si fuesen $5 entre diez? ¿Y $2,5?
- ¿Cuánto le tocaría a cada uno si fuesen $0,80?
- ¿Y si fuesen $0,10?

Luego de que los alumnos resuelven el problema, el docente retomará el reparto de $1 entre diez, y preguntará qué parte de 1 peso representan los 10 centavos. Se busca reconocer que 10 centavos equivalen a 1 décimo de peso y que 1 centavo equivale a 1 centésimo de peso. O sea: 10 centavos ($ 0,10) es 1/10 del peso y 1 centavo ($ 0,01) es 1/100 del peso. En consecuencia, se puede establecer que $ 0,10 repartido equitativamente entre diez, asigna a cada uno $ 0,01. El maestro podrá resaltar y registrar estas conclusiones.

A continuación se propondrá a los alumnos las siguientes preguntas, que ponen en juego las explicitaciones recientemente realizadas:

PROBLEMA 4
(parte b)

- Si pago 10 centavos con una moneda de $ 1, ¿cuánto me dan de vuelto? ¿Cómo escribirías en la calculadora una cuenta que te dé la respuesta?
- Tengo 2 pesos con 73 centavos y necesito llegar a 3 pesos, ¿cuánto me falta? ¿Qué cuenta habría que hacer en la calculadora? Anotala y luego comprobalo.
- ¿Cuánto es necesario agregar si tengo 2 pesos con 3 centavos y necesito 3 pesos? ¿Cómo sería la cuenta en la calculadora?

Mientras los niños resuelven el problema es importante recordarles que se trata de anotar los números y los cálculos tal como los introducirían en la calculadora.

Puede ocurrir que algunos alumnos averigüen las diferencias para los dos últimos ítemes calculando los complementos a partir de la suma y propongan, por ejemplo, 2,73 + 0,27 ó 2,03 + 0,97. En ese caso, se les podrá preguntar cómo averiguaron esos 0,27 ó 0,97 y qué es lo que habría que hacer para que esos sean los resultados obtenidos en la calculadora.

Finalmente, se podrá concluir que, si se dispone, por ejemplo, de $ 2,95, esta cantidad equivale a 2 pesos, 9 décimos de peso y 5 centésimos de peso. Se busca establecer con los alumnos unas primeras conclusiones respecto al valor de cada cifra en dicha escritura.

El siguiente problema es para ser presentado a los alumnos a modo de ejercicio o tarea:

PROBLEMA 5

Con tres monedas de $ 0,50, tres monedas de $ 0,25 y tres monedas de $ 0,10, ¿se pueden pagar justo las siguientes cantidades? ¿Cómo? Anotalas

$ 1, 80
$ 2, 45
$ 1, 05
$ 1, 15
$ 2, 60

¿Será posible hacerlo de diferentes maneras? También anotalas.

En los casos en los cuales es imposible obtener la cantidad, interesa diferenciar:
- para $ 2,60 es porque no alcanza con esas monedas;
- para $ 1,15, en cambio, alcanza pero, por los valores disponibles, no se puede "armar" justo.

Se puede proponer a los alumnos escribir en pesos la moneda que hubieran necesitado para componerlo. También, que escriban otras cantidades que no se puedan pagar porque no alcance con esas monedas o porque no se pueda "armar" justo.

La primera parte de la secuencia en las aulas

Presentamos a continuación una selección de producciones de los alumnos, de interacciones entre los niños y con sus docentes, y ciertas intervenciones de los maestros, para compartir así algunos aspectos centrales de la implementación de la secuencia en las aulas.

PROBLEMA 1
(parte a y b)

Ante este problema, vale la pena destacar la aparición de una diversidad de producciones de los niños en el intento por resolverlos. ¿A qué diversidad nos referimos? Los problemas presentados permiten hacer aparecer en la clase escrituras convencionales y no convencionales, números con coma y sin coma, y una gran variedad de recursos de cálculo y formas de representarlos.

¿Por qué nos interesa generar en el aula esta diversidad? Los procedimientos y escrituras –como mostraremos en los ejemplos– ponen en juego relaciones y conocimientos matemáticos diferentes. Su aparición en la escena del aula permite su relevamiento y análisis, y se constituye en la manera de tender puentes entre los conocimientos disponibles por parte de los niños y los nuevos saberes a los que se apunta.

Por ejemplo, algunos alumnos, como Jony y Fernando controlan que los 5 centavos no se "mezclen" con los 50 centavos. Para ello, en la notación de 5 centavos, dejan un espacio, sin escribir el cero en el lugar de los décimos.

0,50
0,50
0,50
0,50
0,50
0,50
0,25
0,25
0,10
0, 5
0, 5
0, 5
———
3,75

En tanto que otros, como Sebastián, primero escriben el valor de las monedas usando números naturales sin establecer ninguna notación que distinga pesos de centavos. A pesar de ello, en el resultado de la suma, utilizan la coma ya que controlan los valores que suman entre sí.

1 + 1 + 1 + 50 + 25 = 3,75
1 + 1 + 50 + 50 + 50 + 25 = 3,75
1 + 1 + 1 + 25 + 25 + 25 = 3,75

Pero también encontramos alumnos que intentan "armar" la cantidad propuesta por el problema incorporando a la suma aquellos valores que les permiten aproximarse a dicha cantidad. Por ejemplo, Ezequiel, quien va escribiendo los números en forma de "cuenta vertical", lo que señalaría que la "construcción" del 0,87 fue establecida mentalmente o que al menos se controla desde "fuera del algoritmo".

50
+ 25
———
75
+ 10
———
85
+ 1
1
———
0, 87

esta es la de 0,87

G.C.B.A.

¿Qué tienen en común todas estas producciones? En ellas observamos cómo el conocimiento acerca del contexto del dinero permite a los niños "monitorear" las escrituras que aquí producen. Logran distinguir, de modos variados, el valor correspondiente a pesos y centavos a partir de ciertas notaciones. Es decir, producen notaciones en las cuales se pone de manifiesto su conocimiento procedente del contexto acerca de las diferencias entre pesos y centavos. A su vez, luego de producidas tales notaciones, en algunos casos facilitan el control de los cálculos que realizan. En otros términos, los alumnos recurren a sus conocimientos sobre el dinero y a las notaciones producidas a partir de ellos como medio de control y anticipación de los procesos desplegados y de los resultados encontrados.

Ahora bien, uno de los objetivos de este primer problema es que los alumnos establezcan equivalencias entre los diferentes modos de "armar" las cantidades solicitadas. Para ello una docente seleccionó estas dos descomposiciones realizadas por los alumnos:

a) 50 + 25 + 10 + 1 + 1 (cuya notación decimal en realidad sería 0,50 + 0,25 + 0,10 + 1 + 1)

b) 25 + 25 + 25 + 10 + 1 + 1 (correspondiente a 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,10 + 1 + 1)

Luego pregunta: "¿Nos podemos dar cuenta, sin hacer todo el cálculo, de que estas dos maneras, son ambas 87 centavos?". Los alumnos justifican la igualdad apoyándose en las equivalencias. La maestra solicita entonces "armar" otras descomposiciones. Un alumno sostiene que "si seguimos así, armamos el 87 con todas de 1 centavo".

En otra escuela, la maestra propone una respuesta errónea para someterla a discusión en la clase, permitiendo que, en ese análisis, se explicite la diferencia entre el significado de una misma cifra en diferentes lugares.

voces

MAESTRA. — En la escuela de la mañana los chicos me dijeron que 2,08 se formaba con veintiocho monedas de diez centavos. ¿Ustedes qué piensan?
ALUMNO. — No, porque así es dos coma ochenta.
MAESTRA. — ¿Y no es lo mismo?
OTRO ALUMNO. — Si ponés el cero adelante del ocho es unidad y si no, es decena. Según donde pongas el cero cambia el valor.

Este alumno, como muchos otros, está nombrando las posiciones en los números desde sus conocimientos sobre los números naturales. Más allá de que no use convencionalmente los nombres "décimos", "centésimos", etc. está pensando en las relaciones de equivalencia entre las diferentes posiciones que es lo que se intenta comenzar a movilizar a esta altura de la secuencia. En un momento posterior, será necesario retomar estas ideas para introducir los nuevos "nombres".

Otra maestra intenta dirigir las diferentes descomposiciones propuestas por los alumnos para estas cantidades y las relaciones de equivalencia que hayan circulado hacia la reflexión sobre el significado de las diferentes posiciones en las escrituras decimales. Por ejemplo, para 2,08 plantea el siguiente interrogante:

voces

MAESTRA. — ¿Cómo sabemos que el 8 representa ocho monedas de un centavo?
ALUMNO. — El 8 está formado por centavos, lo reconozco por la ubicación. El 2 está formado por doscientos centavos.
MAESTRA. — ¿Y cuál es el valor del 8 en cero coma ochenta y siete?
ALUMNO. — Ochenta monedas de 1 centavo o, si no, ocho monedas de 10 centavos.
ALUMNO. — El segundo lugar es para 1 centavo y para 5 centavos.

Todas estas intervenciones buscaban, de un modo u otro, que los alumnos centraran la atención en las equivalencias entre las diferentes descomposiciones y composiciones, proponiendo inclusive un primer análisis en torno del valor posicional en las escrituras de números decimales.

PROBLEMA 2
(parte a y b)

El problema 2 (parte b) incorpora una dificultad: escribir los cálculos en la calculadora y obtener por resultado 4,03. Obliga a los alumnos a utilizar notaciones más convencionales. Este hecho exige, en algunos casos, intervenciones docentes que permitan a los alumnos tener en cuenta las restricciones que plantea el problema. Por ejemplo, hay muchos alumnos que realizan el cálculo escrito o mentalmente. Fue necesario que los maestros volvieran a explicitar las reglas del problema: "¿Cómo sería el cálculo con la calculadora?", como se evidencia en el siguiente diálogo:

voces

MAESTRA. — ¿Cómo harían doce veces 10 centavos en la calculadora?
ALUMNO. — Uno coma dos da doce y tendría que dar uno coma veinte.
OTRO ALUMNO. — Lo paso a centavos mentalmente para no poner la coma.
OTRO ALUMNO. — Lo hacemos mentalmente porque no podemos poner diez centavos en la calculadora.
MAESTRA. — ¿Por qué harían uno coma dos? ¿Por qué poner la coma entre el uno y el dos?
ALUMNO. — Para que me dé uno coma cero, pero no da.
OTRO ALUMNO. — Tiene que hacer doce por cero coma diez, que da.

Ya "embarcados" en la resolución y frente a la necesidad de que aparezca en el visor de la calculadora una escritura decimal anticipada mentalmente, algunos niños colocan la coma en el número que expresa la cantidad de monedas en lugar de hacerlo en el que expresa el valor de la moneda, como por ejemplo 0,08 x 1, en lugar de 8 x 0,01 para obtener 0,08. La intervención del docente posibilitó el análisis de dicho cálculo y permitió generar condiciones para retomar la búsqueda:

voces

MAESTRA. — ¿Qué representa ese cálculo?
ALUMNO. — Y, da cero coma cero ocho.
MAESTRA. — ¿Pero de dónde salen esos valores?
ALUMNO. — Ah no, es al revés. Son ocho monedas de cero coma cero uno.

Las producciones de los alumnos muestran cómo los niños se apoyan en el dominio de los números naturales y en sus conocimientos sobre el dinero para controlar sus producciones y escrituras. Estas últimas, si bien constituyen un fecundo punto de partida, precisarán no obstante que se ajusten en dirección hacia las formas convencionales.

Pero hay otro aspecto para destacar. En la resolución de este problema, los alumnos producen intercambios en los que explicitan relaciones nuevas, muchas veces implícitas hasta ese momento. En ocasiones, estas interacciones mismas les permiten revisar sus producciones, en otros casos logran resolver en conjunto la situación, etc. Ciertos intercambios espontáneos fueron retomados por los maestros posteriormente para el trabajo colectivo.

PROBLEMA 3

Es precisamente en este problema donde se intenta que los alumnos expliciten la relación entre la escritura y la cantidad de "monedas de diez", aspecto central en el estudio de las relaciones que comandan las escrituras decimales. A su vez, se busca que quede registrado que diez monedas de 10 centavos equivalen a 1 peso.

Parte de esta finalidad aparece en las mismas producciones de los niños, por ejemplo, algunos convierten cada cantidad a centavos y luego dividen por 10. Este procedimiento exige analizar el valor del resto de la división realizada: "Para cuatro coma veinticinco pesos son cuarenta y dos de 10 centavos y sobran 5 centavos que es menos que 10 centavos".

Otros utilizan relaciones de proporcionalidad: "Si en 1 peso hay diez monedas, en 50 centavos hay cinco monedas". Hay alumnos que realizan un análisis de la escritura del número (para 4,25): "En el 4 hay cuarenta monedas, en el 2 hay dos monedas". Para algunos números –como 2,20 o 12,50– algunos chicos dicen que se dan cuenta "sacando el cero". Otros niños dicen que "Te lo dice el número..." y lo explican mostrando que tapan números y dejan las cifras abarcando hasta un lugar después de la coma.

Los intercambios entre alumnos dan lugar a relaciones que son relevantes para la comprensión de la escritura decimal. El siguiente diálogo entre niños (para 4,25) es un ejemplo:

voces

LUCAS. — Cuarenta coma cinco de diez. Hay que hacer cuarenta para hacer cuatro pesos. Le sumás veinticinco, ya no se puede hacer, son cuarenta y dos. Entonces teníamos idea de cambiar una de diez por dos de cinco, entonces te queda cuarenta y dos coma cinco: cuarenta para formar cuatro, dos para formar veinte centavos y media de diez.

FACUNDO C.. — Salvo que diga el problema "se puede cambiar por dos de cinco", pero el problema no dice eso.

DANIEL. — Son sesenta monedas de diez centavos: Esto de cuatro (señalando el cuatro en 4,25). Equivaldría a cuarenta, más veinte (señalando el 2), sería sesenta.

VERÓNICA. — Pero sumás los veinte centavos, no las dos monedas. Cuarenta más dos, cuarenta y dos.

Aquí, los niños explicitan procedimientos justificando la cantidad de monedas halladas como resultado; se señalan errores que, en un caso, se refieren a lo que es lícito en este problema y, en otro, explican que se habían sumado entre sí dos universos diferentes (centavos y cantidad de monedas). Estas confrontaciones permiten que los mismos alumnos lleguen a establecer cuáles son las respuestas válidas a partir de argumentos que ponen en juego el conocimiento matemático.

Sobre este problema quisiéramos destacar que los números involucrados en los problemas influyen en las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos. Efectivamente, para $12,50, $4,25 o $4,03, los recursos puestos en juego inicialmente deben ser revisados o ampliados.

Este aspecto es retomado por varios docentes en las puestas en común buscando que los alumnos expliciten las condiciones en las cuales es posible pagar justo o no. Veamos, por ejemplo, el siguiente intercambio:

voces

MAESTRA. — A partir de lo que hicimos hasta ahora, ¿cuándo piensan que se puede pagar justo?

ALUMNO. — Sólo se pueden pagar justo las que terminan en cero.

ALUMNO. — Si termina con uno no se puede pagar justo.

ALUMNO. — Un peso [que termina con uno] sí se puede pagar.

MALENA. — (antes había dicho que no se podían pagar las cantidades que terminan en número impar) Cuando termina en cero, no cuando es par, porque si es ocho coma cero seis, es par y no se puede.

La maestra pide entonces a sus alumnos que le digan cantidades que sí se puedan pagar justo con monedas de 10 centavos. Le dictan 20,50; 3,20; 270,50; 5,30 mientras las anota en el pizarrón. Pregunta luego por la cantidad de monedas que se necesitan para cada uno de esos valores.

A continuación pide que le dicten cantidades que no se puedan pagar justo, mientras la maestra las escribe en el pizarrón:

voces

OMAR. — Nueve con cinco.
FACUNDO. — No, le falta un cero, nueve coma cero cinco.
TIMUR. — Seiscientos sesenta y seis.
GISELA. — Setenta y siete coma siete.
MALENA. — No, le falta el cero (refiriéndose a 9,5 y 77,7).
MAESTRA. — ¿Dónde el cero?
MALENA. — Delante de la coma.
MAESTRA. — Y así cómo están, ¿se puede o no pagarlos justo?
INÉS. — Sí, porque son cincuenta y setenta centavos, se puede con diez.

Podría parecer curioso cómo, aun después de haber dado respuestas válidas al pedido de cantidades que se pudieran pagar justo con 10 centavos, muchos de los mismos alumnos dan respuestas erróneas al pedido de cantidades que no se pudieran pagar justo. Sin embargo, vuelve a aparecer allí la concepción de los decimales desde la "lógica" de los números naturales: se fijan en que la escritura "termine en cero", y por eso, 9,5 y 666 son respuestas posibles.

Estos diálogos, promovidos por las intervenciones docentes, constituyeron una oportunidad más para discutir sobre ciertas interpretaciones y comenzar poco a poco a ponerlas en "tela de juicio".

También pudieron registrarse intervenciones docentes que permitieron a los alumnos identificar nuevas estrategias que no habían sido producidas por los alumnos de esa clase, como lo refleja la siguiente discusión:

voces

MAESTRA. — Los chicos de la mañana dicen que mirando el número uno se pueden dar cuenta de cuántas monedas de diez se necesitan.
FACUNDO. — Sí, sacándole el cero y la coma.
ALUMNO. — Sacándole el cero es más fácil.
Facundo pasa al pizarrón y lo muestra señalando cada una de las cantidades (para 2,20): Acá le saco el cero y la coma y me da veintidós (borra el cero y la coma).
LUCAS. — Si le sacás el cero a cuatro coma cero tres no pasa nada, igual no podés.
FACUNDO. — Depende del número que sea.
FACUNDO. — Ahora me doy cuenta por el diez, tengo que saber cuántas entran ahí. Vos te das cuenta cuando podés hacer con monedas de diez porque tiene que terminar en cero. Si lo ves que termina en otro número, no se puede.

Aquí, la maestra hace aparecer un procedimiento que no había sido propuesto por la clase y le interesa que sea tratado para someterlo a la discusión por parte del grado. Será esta una oportunidad de precisar las condiciones en las que dicho procedimiento es válido.

PROBLEMA 4
(parte a)

Como se menciona en la secuencia didáctica, este problema tiene por finalidad que los alumnos expliciten la relación entre diez centavos y un peso y registrar que 10 centavos equivalen a la décima parte del peso, introduciendo las escrituras $ 0,10 = 1/10 del peso y $ 0,01 = 1/100 del peso. Varias de la producciones de los alumnos ponen en juego estas relaciones, aunque no sean explícitas las equivalencias en términos de fracciones de la unidad.

Las interacciones entre los niños permiten poner en juego las relaciones que promueve este problema. Por ejemplo, a propósito del reparto de $ 1 entre 10 chicos:

voces

ARIANA. — Un peso son cien centavos, dividido diez chicos da diez centavos.
(Mauro escribe: 1/10 de $1 = 1$: 10 c = 0,10 $.)
MAIRA *(señalando el resultado de Mauro)*. — ¿Son pesos? ¿No son centavos?
OTRO ALUMNO. — Son pesos porque está la coma.

Remarcamos que en este punto los alumnos comienzan a hacer explícita la idea de que 1/10 del peso equivalen a los 10 centavos.

Evidentemente, a esta altura de la secuencia, los niños aún no están en condiciones de comprender la totalidad de las razones que subyacen a estas equivalencias y a estas escrituras, conocimientos que se pondrán en juego en los problemas siguientes. Sin embargo, se han establecido algunos hitos parciales en el avance del aprendizaje de los números decimales: escrituras convencionales y algunas relaciones involucradas en ellas respecto a las equivalencias entre las diferentes posiciones en el contexto del dinero. El registro de estas conclusiones en las carpetas o en un cartel permitirá a los alumnos consultar estas escrituras y volver a utilizarlas para otros problemas.

Cuando los alumnos terminan de resolver el problema 4, luego de analizar algunas producciones, una maestra pregunta a sus alumnos acerca de la escritura de 10 centavos:

voces

MAESTRA. — ¿Cómo hicimos para escribir 10 centavos en la calculadora?
VARIOS ALUMNOS. — Cero coma diez.
MAESTRA. — ¿Y qué parte del peso son los diez centavos?
ALGUNOS ALUMNOS. — Es la décima parte.
ALUMNO 1. — El uno es la decena de los centavos y el cero es la centena.
ALUMNO 2. — No, no son decenas. Eso es del otro lado de la coma. Tiene cero unidades y diez centavos.
MAESTRA. — ¿Diez centavos o un centavo?
VARIOS ALUMNOS. — No, son diez.
ALUMNO. — ¿No ves el diez?
MAESTRA. — ¿Cómo escribiríamos un centavo en la calculadora?
VARIOS ALUMNOS. — Cero coma cero uno.

MAESTRA. — ¿Qué parte del peso es un centavo?
VARIOS ALUMNOS. — La centésima parte.
MAESTRA. — ¿Podremos escribir con una fracción los diez centavos y con otra fracción el centavo?
ALUMNO 2. — Yo puedo escribir con una fracción los cincuenta centavos.
MAESTRA. — Dale, escribila en el pizarrón.
(Alumno 2 pasa al pizarrón y escribe "½".)
ALUMNO. — Claro, porque es la mitad de un peso.
MAESTRA. — ¿Y cómo escribimos los diez centavos?
ALUMNO. — Yo sé *(pasa al pizarrón y escribe "1/10").*
MAESTRA. — ¿Y un centavo?
ALGUNOS ALUMNOS. — Uno sobre cien.
OTROS ALUMNOS. — Uno rayita cien.

La docente escribe en el pizarrón e invita a los alumnos a registrar en sus carpetas las conclusiones del intercambio:

$$10c = \$\ 0{,}10 = \$\ \frac{1}{10}$$

$$1c = \$\ 0{,}01 = \$\ \frac{1}{100}$$

Finalmente, la maestra recién citada propone a los alumnos escribir como fracciones de 1 peso las siguientes cantidades con el objetivo de que los niños reinviertan en un nuevo problema aquello que ha sido trabajado: 0,2; 0,08; 0,25; 0,05. La mayoría de los niños no presenta dificultad en esta tarea. El registro de las conclusiones anteriores en sus propias carpetas funciona como "fuente de consulta" para estos nuevos problemas.

Nuevamente vemos en estas intervenciones la intención de que todos los alumnos se apropien de aquello que es nuevo. La heterogeneidad de los conocimientos puestos en juego por los alumnos al resolver los problemas o en las fases de discusión colectiva nos exige, además de hacer circular lo producido por algunos niños, destacar qué ha sido lo importante que deberá ser registrado y retenido para ser reutilizado en otras situaciones.

Los problemas planteados favorecen la producción por parte de los alumnos de relaciones referidas a las escrituras decimales en el contexto del dinero. La referencia a este contexto ayuda muchas veces a los niños a dar las respuestas que no podrían encontrar fuera del mismo. A partir de los resultados que obtienen, se abre la posibilidad de analizar el funcionamiento de las escrituras decimales. En este análisis, la gestión del docente resulta fundamental no sólo como coordinador de las diferentes producciones de los alumnos, sino brindando la información necesaria que posibilite avanzar en la comprensión de la notación de los decimales. Es así como, por ejemplo, los niños pueden establecer por su experiencia con el dinero que 10 centavos es 1/10 de 1 peso. Pero será necesario que el maestro haga circular para todos los niños que 1/10 de peso se escribe 0,1 y que ese primer lugar después de la coma representa los décimos de peso. También que 1/100 de peso se escribe 0,01 y que ese segundo lugar después de la coma representa los centésimos de peso.

Segunda parte

MEDIDAS DE SEGMENTOS

TIEMPO PREVISTO: TRES O CUATRO CLASES[11]

Luego de haber trabajado en la primera parte en el contexto del dinero, se les propone a los alumnos este nuevo problema que les exigirá usar los conocimientos en un nuevo contexto: la medida de longitudes, y pondrá en juego, de manera más explícita, la relación entre las fracciones decimales y los números decimales.

Contenidos

- Expresión de medidas de longitudes en términos de fracciones decimales y escrituras "con coma".
- Expresión de una medida de longitud utilizando escrituras aditivas equivalentes de fracciones decimales.
- Relación entre las fracciones decimales y escrituras con coma (por ejemplo: relación entre 1/10 y 0,1; 1/100 y 0,01; 1/1000 y 0,001, etcétera).

[11] Se podrá realizar con los niños una revisión del sistema de medidas de longitud recordando que 1 cm es equivalente a 1/100 de metro, 1 dm a 1/10 de metro, 1 mm a 1/1000 de metro, 1 cm a 1/10 de dm, 1mm a 1/10 de cm, etc. En esta revisión no se pondrá en juego la escritura decimal, ya que a ella precisamente apunta la situación de los segmentos.

- Relaciones de equivalencia entre posiciones contiguas y no contiguas de una escritura decimal.
- Descomposición de una fracción decimal en suma de fracciones con denominador 10, 100, 1000 y numerador de una cifra.

Toda la actividad se desarrolla a través de un juego de comunicación en el que un grupo de alumnos dicta a otro grupo las medidas de ciertos segmentos, siguiendo las consignas dadas.

MATERIALES

(por equipo, para toda la secuencia de trabajo):

- Reglas, hojas en blanco y lápiz.
- Material que deberá tener el docente:

- 6 hojas iguales con segmentos trazados de las siguientes medidas: 1,3 cm, 1,4 cm; 1,5 cm; 1,6 cm; 1,7 cm; 1,8 cm; 1,9 cm; 2 cm; 13 cm; 14 cm; 15 cm; 16 cm; 17 cm; 18 cm; 19 cm y 20 cm; que serán utilizadas en varias fases de la secuencia.
- 1 hoja con un segmento de 13 cm.
- 4 hojas con un segmento de 14 cm cada una.
- 4 hojas con un segmento de 15 cm cada una.
- 1 hoja con un segmento de 16 cm.
- 1 hoja con un segmento de 17 cm.
- 1 hoja con un segmento de 18 cm.
- 3 hojas con un segmento de 19 cm cada una
- 3 hojas con un segmento de 20 cm cada una.

ORGANIZACIÓN DE LA CLASE

Se divide toda la clase en una cantidad par de equipos. Si, por ejemplo, fuesen 6 equipos jugarán apareados: equipo A con B, el C con el D y el E con el F. Cada equipo recibirá una hoja con un segmento dibujado y una hoja con todos los segmentos. El juego consiste en informar al equipo con el que se juega, a través de un mensaje escrito, cuál es el segmento recibido para que pueda identificarlo. Para ello, el docente les indicará qué condiciones deberá tener el mensaje.

FASE 0
(*optativa*)

Se puede proponer inicialmente una actividad cuyo objetivo es que los niños se familiaricen con la situación. Se muestra a la clase la hoja con todos los segmentos explicando a los alumnos que cada grupo recibirá dos hojas: una que es fotocopia de la que tiene todos los segmentos dibujados y otra con uno de esos segmentos, que el equipo con el que juegan no puede ver. El docente entrega a cada uno de los equipos una hoja con uno de los siguientes segmentos dibujado: 13 cm; 14 cm; 15 cm; 16 cm; 17 cm y 18 cm. Se explica a los alumnos que deberán enviar al equipo con el que juegan un mensaje para informar cuál ha sido el segmento. No se puede dibujar el segmento como parte del mensaje. Luego se intercambian los mensajes elaborados por cada grupo remitiéndolos al grupo receptor. En función de la información recibida, los niños que reciben el mensaje deben decidir a cuál de los segmentos de la hoja corresponde el que tienen sus compañeros. Una vez decidido, ambos grupos verifican si efectivamente lograron hallar el segmento de sus compañeros.

PRIMERA FASE
Restricciones en la unidad de medida y utilización de fracciones con denominador 10, 100 ó 1000.[12]

Las reglas de juego de esta fase son similares a las mencionadas en la actividad de familiarización propuesta. En el caso de no haber realizado aquella, será necesario plantear aquí las reglas de juego. Se agregan ahora dos nuevas restricciones para la elaboración de los mensajes: hay que dar la información en metros y solamente se pueden usar fracciones con denominador 10, 100 ó 1000.[13]

Se distribuyen ahora los segmentos de 19 cm y 20 cm del siguiente modo: para los equipos A, C y E, el de 19 cm; y para los otros tres, el de 20 cm. Se espera que los alumnos produzcan mensajes como los siguientes: para el de 20 cm, 2/10m; 20/100 m; dos de 1/10 m; veinte de 1/100 de metro. Algunos posibles errores en relación con este segmento son 2/100 m o 20/10 m.

Luego intercambian los mensajes y se verifican por superposición si han encontrado el segmento correspondiente. Si no se superponen, se realiza un primer análisis entre los equipos que se han intercambiado el mensaje. Se les propone encontrar en dónde residió la dificultad: ¿hubo errores en el mensaje?, ¿se entendió el mensaje?, ¿qué debería haber dicho el mensaje para saber seguro de qué segmento se trataba?, ¿estaba bien el mensaje y fue mal interpretado?, ¿qué es lo que entendieron los que lo leyeron?, etcétera.

En la puesta en común se analizan las dificultades que encontraron para elaborar el mensaje y se analizan las diferentes escrituras. En este momento, el docente recupera lo realizado con el dinero en relación con las equivalencias: qué parte del metro es 10 cm; qué parte del metro es 1 cm y qué parte del metro es 1 mm, y se establecen las equivalencias correspondientes. Por ejemplo, "para 19 cm se puede escribir 19/100 de metro o 190/1000 de metro".

El maestro podrá proponer ahora a los alumnos que, en parejas, escriban cómo sería un mensaje para un segmento de 23 cm o para segmentos de otras medidas. Esta actividad tiene por finalidad reinvertir los conocimientos que han circulado en la puesta en común.

Luego, el maestro les solicita escribir otro mensaje para segmentos de 1,5 cm y 2,3 cm. Tendrán que utilizar aquí necesariamente escrituras con milésimos de metros. Por ejemplo, para 1,5 cm, 15/1000 de metro (o bien, 1/100 de metro y 5/1000 de metro, escritura que se abordará en la fase siguiente).

[12] Al transmitir la consigna, es necesario recalcar que las parejas de emisores y receptores que juegan juntas no compiten entre sí, sino que se trata precisamente de que puedan determinar cuál es el segmento correspondiente a partir del mensaje de su pareja compañera.
[13] Estas restricciones pueden anotarse en el pizarrón para que estén disponibles durante toda la actividad. Si el maestro durante la actividad observara que algún grupo elabora un mensaje sin tenerlas en cuenta, podrá recordarlas y remitir al pizarrón.

SEGUNDA FASE
Utilización de expresiones aditivas de fracciones decimales

Nuevamente se juega repartiendo a cada grupo una hoja con todos los segmentos y una hoja con un solo segmento. Esta vez, los segmentos que reciben tres de los grupos son de 14 cm y, los otros tres grupos, de 15 cm. Se les dice a los alumnos que se ha agregado una restricción más: en las fracciones solamente se pueden utilizar numeradores de una sola cifra.

La intención es que los alumnos puedan "desarmar" el 0,14 metros o 14 cm apelando a escrituras del tipo 1/10 m + 4/ 100 m o bien 1/10 y 4 de 1/ 100. Es posible que aparezcan también las siguientes escrituras erróneas: 1/100 m + 4/100 m.

Otras escrituras aditivas válidas son descomposiciones como las siguientes que, si bien no se corresponden con los valores de cada cifra en la notación decimal, sí respetan las restricciones propuestas:

Por ejemplo, para un segmento de 14 cm:
8/100 + 6/100
7/100 + 7/100
9/100 + 1/100 + 4/100

En la puesta en común podrán retomarse estas escrituras vinculándolas con aquellas que se corresponden con las notaciones decimales: 1/10 + 4/100 o también 10/100 + 4/100. En la discusión colectiva se analizan las diferentes escrituras, se establece cuáles son correctas y cuáles no lo son y por qué. Se establece la equivalencia entre las diferentes escrituras correctas.

Luego se analiza la relación entre la escritura decimal y la fraccionaria. Por ejemplo, en la escritura 0,14, el número 1 representa 1/10 y el número 4 representa 4 de 1/100, o sea, 4/100. Se plantea entonces que 0,14 es igual a 1/10 + 4/100. El maestro introduce la notación decimal sobre la base de las relaciones producidas: la primera posición después de la coma corresponde a los décimos de metro, y la segunda, a los centésimos de metro.

TERCERA FASE
Reinversión de los conocimientos que se han puesto en juego en la fase anterior

A continuación el docente puede proponer diferentes problemas:

- Escribir mensajes para nuevos segmentos hipotéticos. Por ejemplo: escribir cómo sería el mensaje para cada uno de estos segmentos: 0, 57 m; 1,06 m; 3,4 cm; 3 mm; 2,39 m; etc. habilitando la escritura de enteros (2 m + 3/10 m + 9/100 m).
- Dibujar segmentos a partir de longitudes dadas. Por ejemplo: 2/10 metro + 5/100 metro; 1/10 metro + 5/1000 metro; 4/100 metro + 5/1000 metro.
- Comparar medidas expresadas en números decimales con otras expresadas en fracciones. Por ejemplo: "Tengo un segmento de 0, 63 m, y otro de 6/10 de metro y otro de 8/100 de metro. ¿Cuál es más largo?".

La segunda parte de la secuencia en las aulas

Este conjunto de problemas permite hacer funcionar relaciones vinculadas al significado de las notaciones decimales en otro contexto diferente al del dinero, como es la medida de longitudes.

PRIMERA FASE

Restricciones en la unidad de medida y utilización de fracciones con denominador 10, 100 ó 1000.

Algunas primeras dificultades:
En el inicio de la resolución de este problema se presentaron algunas dificultades esperables. Estas exigieron a los maestros desplegar ciertas intervenciones para que los alumnos retomaran la búsqueda y se involucraran nuevamente en el problema. El problema exige expresar la medida en metros pero los niños no disponen de un metro y deben inferir el resultado que se pide usando los centímetros como unidad. Esto produce el reclamo de algunos niños como Laura y Lautaro: "¿Alguien tiene regla larga?"; o "No tenemos metro en la regla".

Otros alumnos se centraban inicialmente en responder, pero teniendo en cuenta sólo una parte de las restricciones, por ejemplo: "¿Puede ser en milímetros?"; "¿Puedo usar rayitas?", etc. Estos alumnos, tal como se pide, no utilizan centímetros pero no contemplan la exigencia de expresar la medida en metros. Así, por un lado, garantizan un número entero y, por otro lado, ese número aparece indicado por el instrumento de medida mismo ya que la regla tiene los milímetros señalados y basta entonces con contarlos.

En otra clase, algunos alumnos reemplazaron la palabra "centímetros" por "metros", sin realizar ninguna transformación numérica. En este caso vemos cómo la maestra intervino recordándoles las restricciones de la consigna y evocando relaciones ya establecidas:

voces

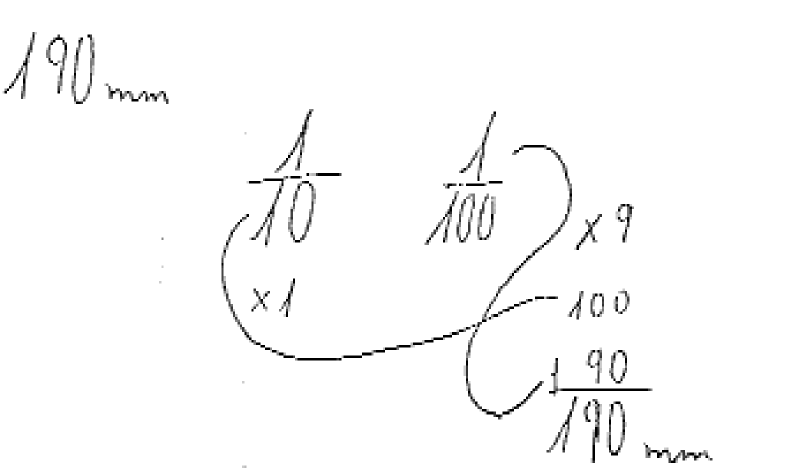
(Jony y Lautaro anotan, para el segmento de 19 cm, "19 metros".)
MAESTRA *(se acerca y pregunta)*. — Pero, ¿ese segmento mide diecinueve metros?
LAUTARO. — No, pero no se puede usar centímetros.
MAESTRA. — Un centímetro, ¿qué parte del metro es?
JONY. — Un décimo... un centésimo.
LAUTARO. — ¡Un centésimo!, ¡eso!
JONY. — Nosotros queríamos sacar los centímetros y ponerlos como metros, diecinueve metros.
LAUTARO. — Un centímetro, un centésimo de metro. Entonces vamos haciendo por cada centímetro...
ALMA. — Diecinueve centésimos porque esto *(señala 1 cm en la regla)* es un centésimo de metro.

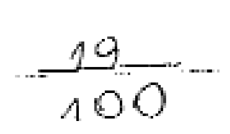
En otro caso, el grupo que envía el mensaje aclara que es el de 190 mm (refiriéndose al segmento de 19 cm). El docente recuerda que deben usar fracciones y qué denominadores pueden usar. Un integrante del grupo dice entonces: "Los diez son un décimo del metro y los nueve son nueve centésimos" (mientras señala 19 cm) y anota 1/10 y 1/100. Otro alumno del grupo lo corrige: "No pongas un centésimo. Poné nueve centésimos". El primer alumno, en vez de seguir literalmente las indicaciones de su compañero, agrega "x 9" a su escritura de 1/100 anterior.

Estos ejemplos nos muestran interacciones entre pares en la búsqueda de la resolución de la situación e intervenciones de los docentes que permiten reorientar dicha búsqueda. Estos "errores" iniciales fueron muy ricos para el trabajo en el aula, ya que en el proceso de "corrección" de las propias notaciones se promueve la explicitación de relaciones respecto al significado de las posiciones de la notación decimal por parte de toda la clase.

Diferentes resoluciones, diferentes relaciones...
El intento de representar la medida de un segmento según ciertas condiciones promueve diferentes fraccionamientos: décimos, centésimos o milésimos de metros. Es muy frecuente que los alumnos usen centésimos, suponemos que por la relación más evidente entre centímetros y centésimos de metro.[14] Pocos niños hacen una conversión a milímetros para expresar la medida del segmento en milésimos. Las notaciones menos frecuentes son las que recurren a los décimos, pues implicaría establecer una equivalencia entre diez centímetros y la décima parte de un metro, medida que no es de uso social, ni tiene "marcas" en la regla.

Entre los alumnos que utilizan centésimos, algunos escriben una sola fracción utilizando expresiones numéricas (19/100), o verbales ("19 centésimos de metro"). Otros recurren a una descomposición aditiva (10/100 + 9/100 para 19/100; o 10/100 + 10/100 para 20/100). En estos casos, no siempre aparece el signo "+", a veces se unen las fracciones de la descomposición mediante la conjunción "y", rayitas, o simplemente yuxtaponiéndolos.





[14] Recordemos que también, para los niños, es más evidente la expresión fraccionaria de la relación entre centavos y pesos (que un centavo es un centésimo de peso), y que es más complejo reconocer en la relación entre monedas de diez centavos y pesos que la primera es un décimo de la segunda.

En los mensajes que producen los alumnos para comunicarles a otros la medida de un segmento, es frecuente que no indiquen la unidad de medida en sus notaciones. Sin embargo, quienes los interpretan suelen dar por sobrentendido a qué unidad se refieren los autores de dichas escrituras. Otros niños remarcan, al mencionar la unidad, que se trata de un metro, proponiendo una explicitación incluso mayor que la de la escritura convencional. Así, Agustina y Leonardo afirman: "Nuestro segmento es de 20/100 de 1 metro".

Algunos alumnos precisan escribir, a modo de control o de apoyo para poder expresarlo en forma fraccionaria, que el segmento mide 190 mm y, desde allí, establecen que mide 190/1000.

La diversidad de resoluciones y notaciones que se producen en el interior de una misma clase constituye una base fértil para el intercambio colectivo donde se discutirá sobre la validez de cada una de ellas, cómo se han determinado, las equivalencias que guardan entre sí. Cuando sea interesante incluir alguna relación que no ha sido utilizada, el maestro podrá mencionarla y someterla a discusión.

LA PUESTA EN COMÚN: UN ESPACIO PARA DISCUTIR Y FUNDAMENTAR

En la puesta en común los maestros seleccionaron ciertas escrituras de los niños con el fin de promover una discusión en torno de ellas. Se piden explicitaciones acerca de cómo llegaron a establecerlas y argumentaciones sobre su validez. Por ejemplo, una maestra pide a un alumno de cada grupo que escriba el mensaje en el pizarrón. Los alumnos anotan: 1/10 y 9/100; 19/100; 190/1000. Luego pregunta a la clase si todas estas escrituras representan al mismo segmento:

voces

ALUMNO 1. — Sí. Estos son iguales porque este (señalando 190/1000) es ciento noventa de los mil milímetros y este (19/100) son diecinueve de los cien centímetros. Es lo mismo. Este (1/10 y 9/100) no sé.

ALUMNO 2 *(del grupo que elaboró dicho mensaje)*. — Este también es diecinueve centímetros porque agarré uno de diez centímetros y otro de nueve centímetros y se escriben así *(señala su escritura)*.

MAESTRA. — ¿Todos entienden lo que dice Hernán?

VARIOS ALUMNOS. — No.

HERNÁN. — Mirá. Si mide diez centímetros, es uno de diez. ¿Sí? A esos diez le sumás nueve centímetros. Y esos nueve son nueve de los cien que tiene el metro.

MAESTRA. — ¿Por qué decís que diez centímetros es uno de diez? *(señalando 1/10)*.

HERNÁN. — Pero tiene diez de diez centímetros. Es como con las monedas. Diez de diez son un peso. Diez de diez centímetros son un metro.

Vemos aquí la importancia de la selección realizada por la docente que favorece que un conocimiento que no había sido utilizado por la gran mayoría de la clase pueda someterse a debate: las equivalencias entre expresiones con décimos, centésimos y milésimos. También es interesante destacar cómo los niños vuelven a apoyarse en sus ya "viejos" conocimientos construidos a propósito del dinero.

La puesta en común permite también analizar colectivamente los errores que han sido producidos. Por ejemplo, en un grupo se discute la denominación de la fracción 19/100. Un grupo produjo el siguiente mensaje: "La decimonovena parte del entero" y la docente provoca el siguiente diálogo:

voces

SEBASTIÁN. — Ellos pusieron la decimonovena parte.
MAESTRA. — ¿Cómo lo pusieron? ¿Así? *(Escribe en el pizarrón 1/19.)*
(Esta intervención es realizada intencionalmente por la docente para promover la discusión en torno de esa solución.)
SEBASTIÁN. — No, lo escribieron con palabras.
OTROS ALUMNOS. — Eran diecinueve centésimos.

La maestra escribe en el pizarrón 1/19 y 19/100 y propone analizar si son equivalentes o no, el significado de cada una y que se registre en la carpeta tanto el análisis del error como la respuesta al problema.

Queremos destacar aquí el papel de los alumnos para validar las producciones. Obsérvese que la maestra trata de generar un debate entre los compañeros para llegar a establecer dónde reside el error. Es claro que ella se reserva el papel de intervenir si el problema en cuestión no llega a resolverse a partir de las intervenciones de los niños. Esta validación a cargo del grupo es promovida tanto para soluciones erróneas como acertadas.[15]

REINVERSIÓN DE CONOCIMIENTOS

Ante nuevos segmentos que presentan los docentes, simulando el juego de los mensajes, los alumnos producen escrituras que recuperan las ideas que han ido circulando tanto en los grupos pequeños como en las puestas en común. Muchas de ellas indican equivalencias entre diferentes fracciones propuestas, e incluso diferentes descomposiciones. Por ejemplo, para el segmento de 23 cm, Gabriel, Jonathan y Fede –de diferentes escuelas– proponen: 23/100 = 230/1000; Laura anota 23/100; Federico, 1/10 m x 2 = 2/10 + 3/100 = 23/100; y Leo y Rocío escriben 10/100 m + 10/100 m + 3/100 m = 23/100 m.[16]

También vuelven a aparecer ciertos errores. Por ejemplo, ante el segmento de 23 cm, un alumno propone simultáneamente las tres escrituras siguientes: 23/10; 23/100; 23/1000. El debate colectivo será una ocasión para analizar qué significa cada una de estas fracciones y si pueden representar la misma medida.

Fue muy fértil analizar con los alumnos algunas escrituras como la de Eliana y Ornella que escriben "1,5/100", extendiendo la idea que usaron para 23 cm. Ellas explican cómo hacen para pasar de la escritura decimal a la fraccionaria: "Se repite el número en el numerador y se pone cien como denominador". Al producir

[15] Puede consultarse al respecto el papel de las interacciones en la clase en tanto constitutivas del sentido de los conocimientos en el *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Marco General,* “Matemática”. Remitimos también al Anexo del *Documento de trabajo nº 5* (editado por la Dirección de Currícula) sobre la organización de las puestas en común.
[16] Es curioso cómo en los mensajes que proponen una descomposición aditiva necesitan indicar también el resultado de la suma propuesta, confirmando que se trata de 23/100, como si no fuera suficiente con la indicación. Es probable que esto se encuentre vinculado a ciertos hábitos escolares en relación con los cálculos donde siempre que aparece un cálculo indicado se espera que se le asigne su resultado.

esta escritura Eliana y Ornella "sortean" nuestra intención de producir escrituras en milésimos. Es interesante plantear en la clase la discusión sobre la validez de esta escritura y analizar cómo obtener una expresión equivalente usando fracciones (cociente de enteros).

Hay alumnos que, en este momento de reinversión, logran explicitar el control que ejercen sobre el significado de la escritura. Por ejemplo, Marcelo y Tomás, quienes, frente a la medida de un supuesto segmento de 2,3 cm, dicen "Este es centímetros (señalando el 2) y este es milímetros (señalando el 3)" y se apoyan en esta descomposición para producir la escritura fraccionaria correspondiente.

SEGUNDA FASE

Utilización de expresiones aditivas de fracciones decimales

Ante las nuevas restricciones que plantea esta fase, los alumnos producen escrituras aditivas que dan cuenta de las relaciones que se intenta promover. Por ejemplo, frente al segmento de 14 cm, Facundo y Hernán escriben:

$$\frac{1}{10} + \frac{4}{100}$$

Otros alumnos producen un error, que es muy frecuente en los niños, fruto de la extensión de sus conocimientos sobre los números naturales al campo de los números racionales:
10/100 + 4/100 = 14/200. Según sea el estado de conocimientos del conjunto, podrá ser rico o no discutir esta escritura con todos los alumnos.

Hay quienes recurren a la escritura decimal para establecer la descomposición requerida. Así, por ejemplo, Alma afirma: "Yo pienso en que sería cero coma catorce, entonces un décimo y cuatro centésimos".

Además de las mencionadas anteriormente, aparecieron diversas escrituras aditivas que, si bien no explicitan las relaciones entre decimales y fracciones, son válidas para compararlas con las anteriores: 8/100 + 6/100; 7/100 + 7/100; 5/100 + 5/100 + 4/100; 9/100 + 1/100 + 4/100; etcétera.

EXPLICITACIÓN, REGISTRO Y REINVERSIÓN DE LAS RELACIONES ESTABLECIDAS

Con la finalidad de explicitar las relaciones entre la escritura decimal y la descomposición aditiva utilizando fracciones decimales, una maestra pregunta a sus alumnos si existe alguna relación entre 1/10 + 4/100 y la escritura decimal 0,14. Para muchos alumnos, esta pregunta da lugar a la formulación de relaciones que han sido puestas en acto en el momento de la resolución. Por ejemplo, un alumno sostiene que sí hay relación "porque el uno está ocupando el lugar de los décimos y sería un décimo del metro y el cuatro sería cuatro centésimos del metro".

Para el segmento de 15 cm, la maestra retoma la escritura "0,15 m" que había en el pizarrón, explicitando: "Ustedes dijeron que estos (señalando el 1) son diez centímetros, que son un décimo de metro por eso está en ese lugar. Y este (señalando el 5) son 5 centímetros, son 5 centésimos de metro, por eso va en el lugar de los centésimos. Ahora vamos a anotar en las carpetas lo que estuvieron conversando acerca de cuál es el lugar de los décimos y cuál el de los centésimos...".

La presentación de nuevos segmentos permite que los alumnos reutilicen los conocimientos ya explicitados y registrados.

Las medidas de segmentos que ocasionaron mayor dificultad fueron 1,06 m y 3,4 cm, por la presencia del cero en la primera y el cambio de unidad de medida en la segunda. Por ejemplo, Inés y Sofía, habiendo producido escrituras correctas para todas las demás medidas, escriben para 1,06 m: 1/10 + 6/100.

Otros alumnos pueden controlar las escrituras a partir de "respetar los ceros" que se presentan en la expresión decimal. Colocan, a medida que escriben la cifra para cada numerador, denominadores correspondientes a posiciones contiguas. Por ejemplo Esteban, para 1,06 m, escribe: 1 + 0/10 + 6/100. Es posible que escribiendo la fracción para cada posición se les facilite la tarea de controlar el denominador correspondiente a cada una de ellas.

Para 3,4 cm, un alumno escribe 3/100 + 4/1000 justificándolo de la siguiente manera: "Porque son tres centímetros. Es igual al de uno coma cinco" (refiriéndose al segmento de 1,5 cm, trabajado en una clase previa). Si esta relación no es traída por algún alumno a la clase, el docente mismo puede proponerla a consideración del conjunto.

Un maestro propuso otro problema de reinversión que exigía comparar una medida expresada en números decimales y otra en fracciones: "Tengo un segmento de cero coma sesenta y tres metros y otro de seis décimos de metro y ocho centésimos de metro. ¿Cuál es más largo?".

Como decíamos al comienzo de esta segunda parte de la secuencia, el conjunto de problemas que la conforman representa para los alumnos un desafío mayor que los referidos al dinero, planteados inicialmente. Si bien permiten retomar los conocimientos utilizados en aquella primera instancia, es precisamente el nuevo desafío el que provoca un avance en el establecimiento y el análisis de relaciones a propósito del significado de las escrituras decimales.

Tercera parte

CARTAS CON DECIMALES

TIEMPO PREVISTO: DOS O TRES CLASES

Contenidos

- Equivalencias de expresiones con diferentes unidades contiguas: 10 de un orden equivalen a 1 del orden que le sigue a su izquierda. 1 = 10 de 0,1 = 100 de 0,01= 1000 de 0,001; 0,1 = 10 de 0,01 = 100 de 0,001, etcétera.
- Análisis del valor posicional en las escrituras decimales.

Se presenta el siguiente problema –para ser resuelto en parejas– que tiene por objetivo que los alumnos profundicen el análisis del valor posicional en las escrituras decimales. (En el primer problema el docente puede entregar las cartas incluidas en el Anexo, págs. 67 y 68.)

PROBLEMA 1

Si tuvieran un mazo con las siguientes cartas:
- 10 cartas de 0,1
- 10 cartas de 0,01
- 10 cartas de 0,001

a) ¿Con cuáles cartas armarías los siguientes números: 0,2; 0,03; 0,005; 0,25 y 0,375?
b) Juan usó 3 cartas de 0,001, 3 de 0,1 y 4 de 0,01. ¿Qué número armó?
c) Intenten armar el 1,02 de dos maneras diferentes. ¿Y el 1,2?
d) ¿Qué número se arma con las treinta cartas juntas?

Se pretende poder analizar el significado de las escrituras y su relación con el hecho de que con 10 de un orden se arma uno del orden inmediato superior. A su vez, se establece la equivalencia entre armar 0,2 usando dos cartas de 0,1 o mediante el cálculo 2 x 0,1.

Luego se presenta el siguiente problema que permite reinvertir la relación multiplicativa recientemente enunciada:

PROBLEMA 2

Un nene hizo el siguiente cálculo para saber qué número se arma con las cartas que tiene: 5 x 0,1 + 3 x 0,01. ¿Cuál era el número?

Al término de la resolución, el docente pide a los alumnos que la verifiquen mediante la calculadora. Luego se propone la misma actividad para los siguientes cálculos:

- 4 x 0,1 + 3 x 0,01 + 5 x 0,001
- 7 x 0,1 + 6 x 0,001
- 2 x 0,01 + 5 x 0,001

A continuación se propone a los alumnos el siguiente problema –para ser resuelto individualmente– con el objetivo de ejercitar en otra situación el análisis del valor posicional puesto en juego en los problemas anteriores:

PROBLEMA 3

Si en el visor de la calculadora escriben el número 3,452, ¿qué deberé hacer con la máquina para que aparezca el número 3,402 sin borrar? ¿Y para que aparezca el 3,052?
Si en el visor de la calculadora está el número 2,347, ¿qué deberé hacer para que aparezca el número 2,007 sin borrar?

Cuando los alumnos terminan de resolverlo se explicitan los recursos utilizados destacando la relación entre el número dado y el que se desea obtener, a partir de un análisis del valor posicional. Por ejemplo, para obtener 3,402 a partir de 3,452 será necesario analizar que ese 5 representa 0,05.

La tercera parte de la secuencia en las aulas

Algunos maestros, antes de presentar este problema a sus alumnos, proponen revisar lo trabajado en los contextos del dinero y la medida estableciendo aquellas equivalencias que se concluyeron en las actividades precedentes. Por ejemplo:

$ 0,1 = 1/10 de peso $ 0,01 = 1/100 de peso

0,1 m = 1/10 de metro 0,01 m=1/100 de metro 0,001 m=1/1000 de metro

PROBLEMA 1

Mientras los alumnos resuelven el problema, el docente algunas veces debe recordar las condiciones establecidas para la tarea. Por ejemplo, que se pueden volver a usar todas las cartas para nuevos números o también que sólo disponen de esas diez cartas para cada valor. La resolución del problema 1 –ítem a– en general no presenta mayores dificultades para los alumnos.

Hemos observado que en algunos casos los recursos que usan los niños están relacionados con las actividades anteriores, a tal punto que llegan a pensar los decimales en juego en esta situación como si se tratara de dinero. Por ejemplo:

voces

ALEJANDRO. — Dos cartas de 10 centavos.
(Matías escribe "2 de 0,1".)
ALEJANDRO. — Esto sería 25 centavos *(refiriéndose a 0,25)*.
MATÍAS. — Ah, le ponemos dos cartas de cero coma uno y cinco cartas de cero coma cero uno.

Estos niños se apoyan en sus conocimientos referidos al contexto del dinero para los primeros números pero, cuando se trata de números que tienen milésimos, ya no les resulta un recurso suficiente para resolver el problema.

Los errores producidos durante la resolución ponen en juego conocimientos y relaciones necesarios de ser revisados. La interacción entre los niños provoca en muchos casos la posibilidad de dicha revisión. Por ejemplo, Jony había armado 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0, 01 + 0,01 = 0,25. Después de discutir con su compañero se acerca a su docente y le pregunta: "¿No se puede hacer cincuenta y dos en vez de veinticinco? Porque nosotros nos equivocamos y formamos cincuenta y dos".

En otro caso, se escucha el siguiente diálogo:

voces

ALMA. — (para armar 0,25) cinco de estas (0,01) de un centésimo y necesitaríamos veinte de un décimo y no tenemos.
MARISOL. — Necesitamos dos décimos.
ALMA. — No, necesitamos veinte décimos, no dos. ¡No, son dos décimos!
MARISOL. — Sí, porque son décimos.
ALMA. — Cinco de estos (0,01) y dos de estos (0,1).

La confusión inicial de Alma probablemente se deba a que, al descomponer 25 centésimos en 20 y 5, no establece luego la equivalencia entre 20 centésimos y 2 décimos, error que advierte tras la intervención de su compañera.

Rescatamos también la siguiente discusión en tanto la maestra promueve un avance en el análisis de las equivalencias entre escrituras a propósito de armar 0,375:

voces

AGUSTÍN. — Ahora me toca a mí. Cero coma uno por tres.
FERNANDO. — Vos estás loco.
AGUSTÍN. — Poné trescientos que es más fácil *(por 0,300)*.
FERNANDO. — No se puede poner trescientos, no te da trescientos.
AGUSTÍN. — Te va a dar trescientos porque son las décimas. Hay que contar los milésimos.
LEONARDO. — Cero coma uno por tres es cero coma treinta porque cero coma dos es cero coma veinte *(refiriéndose al cálculo que acababan de realizar de 2 x 0,1 para 0,25)*.
AGUSTÍN. — Tres o treinta o trescientos, es lo mismo, para allá hay infinitos ceros. Le estoy poniendo todos los ceros para que se entienda mejor. También puede dar tres mil, o tres millones.
MAESTRA. — Agustín dice que es lo mismo esto *(escribe 0,3)*, esto *(escribe 0,30)* y esto *(escribe 0,300)*. ¿Ustedes qué piensan?
ALMA. — Si agregás cero para allá, es un lugar más, son equivalentes.
LAURA. — Es el mismo valor.
MAESTRA. — En un décimo, ¿cuántos centésimos hay?
AGUSTINA. — Diez.
MAESTRA. — ¿Y en un décimo cuántos milésimos hay?

JONY. — Cien.
MAESTRA. — Ustedes dicen que en un décimo hay diez centésimos y cien milésimos. ¿Eso nos ayuda a pensar si puede ser cierto o no lo que estaba diciendo Agustín, que estas escrituras *(señala 0,3 - 0,30 - 0,300 en el pizarrón)* indican lo mismo?
(Varios alumnos dicen que sí.)
MAESTRA. — ¿Por qué nos servirá?
LAUTARO. — Porque si un décimo son cien milésimos, dos son doscientos, tres, trescientos; y así *(explicando por qué tres décimos es equivalente a 300 milésimos)*.

Ante el ítem b de este problema, vemos cómo la docente trata de orientar la resolución de una alumna:

voces

MARINA. — No me sale.
MAESTRA. — ¿Qué se forma con tres de cero coma cero, cero, uno?
MARINA. — Tres milésimos.
MAESTRA. — ¿Y con tres de cero coma uno?
MARINA. — Tres décimos.
MAESTRA. — ¿Y con cuatro de cero coma cero, uno?
MARINA. — Cuatro centésimos.
MAESTRA. — ¿Y qué número se forma juntando todo eso?
MARINA. — Ah, ¿cómo era? Pongo acá los décimos *(escribe 3)*, acá los centésimos *(escribe el 4 a la derecha del 3)* y acá los milésimos *(escribe el 3 a la derecha del 4)*.
RAÚL. — ¡¡¡Trescientos cuarenta y tres milésimos!!!
(Marina agrega el cero y la coma a la escritura 343.)

Aunque la mayoría de los alumnos resuelven el problema mediante cálculos, en la puesta en común los docentes promueven un análisis que busca reconocer que es posible resolverlo sin hacerlos. Ante la pregunta de una docente: "¿Será posible saber qué número se forma sin hacer la cuenta?", algunos alumnos responden: "Porque cada uno (refiriéndose a cada cifra) te dice de dónde es el número" o "Es lo mismo que para los otros números. ¿Viste que por ejemplo para (escribe 4.128) este cuatro son cuatro de mil, esto vale mil y este (por el 1) de cien y lo voy agregando, estos son veinte (por el 2) y así hasta tener el número completo, bueno acá es lo mismo".

En otra escuela, cuando la maestra le pregunta a Alejandro cómo lo resolvió, explicita cómo "pasa todo" a milésimos: "Yo hice desde el número mayor, tres de cero coma uno, y eso sería trescientos; cuatro de cero coma cero, uno, son cuarenta y trescientos más cuarenta son trescientos cuarenta. Y las tres cartas de cero coma cero, cero, uno, son tres milésimos, y me da trescientos cuarenta y tres milésimos".

Maira explica a sus compañeros, en la puesta en común, el procedimiento para calcular la cantidad de cartas de cada valor. Recurre para ello al análisis de la posición de cada uno de los números en la escritura.

voces

MAIRA. — Yo lo hice así,
(escribe en el pizarrón 3 de 0,001 = 0,003
3 de 0,1 = 0,3
4 de 0,01 = 0,04
es igual a 0,343).
MAESTRA. — ¿Cómo llegaste a esto? *(señala 0,343).*
MAIRA. — Me estaba fijando en la posición que tenía cada uno: último, segundo, primero.

Otro alumno escribe en el borde de la hoja "D C M" y explica: "Como me confundía dónde iba cada uno, lo hice así. Yo sabía que décimos eran diez, centésimos eran cien y milésimos eran mil. Y puse "D C M" y, en cada lugar, puse los números: tres en D, tres en M y cuatro en C, y así me dio cero coma tres, cuatro, tres".

Ya en el ítem c, se produce una serie de justificaciones que ponen en juego las relaciones de equivalencia entre diez de un valor y el valor contiguo de la izquierda.

voces

LUCAS. — No podemos hacer el uno coma dos.
MAESTRA. — Para el uno, ¿qué cartas necesitan?
LUCAS. — Diez de un décimo.
MAESTRA. — ¿Y tienen?

Como los niños se dan cuenta de que si usan los décimos para armar el entero no les quedan de estas cartas para armar dos décimos, intentan armar el entero con cartas de 1/100 o de 1/1000, en el marco del siguiente diálogo:

voces

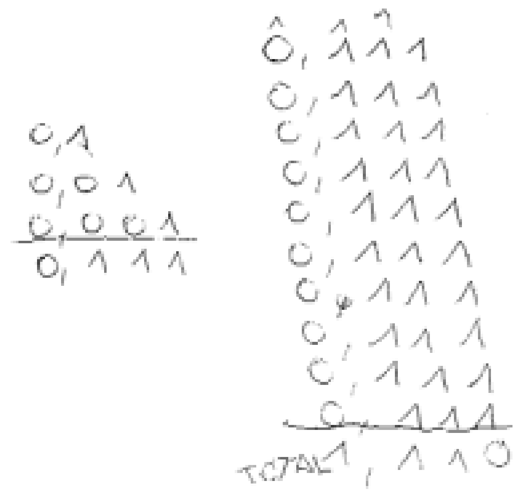
MAURO. — Diez de un centésimo no alcanza para un entero.
LUCAS. — Con diez de un milésimo, formás cero coma cero uno.
FLORENCIA. — Entonces cero coma cero uno, ¿es un centavo?
MAIRA. — No, centavo es para el dinero, es un centésimo.
FLORENCIA. — Entonces, ¿cien centésimos es un entero?
MAIRA. — Sí.

Muchos alumnos justifican la imposibilidad de armar 1,2 con esas cartas basándose en que con todas las cartas juntas se forma un número menor a ese (1,11). Así, en diferentes escuelas, escuchamos las siguientes afirmaciones:

voces

MAURO. — Si sumás todas, tenés uno coma once. Cuando te das cuenta, ya resolviste el que sigue.
AGUSTÍN. — No se puede armar el uno coma dos.
MANUEL. — ¿Por qué?
AGUSTÍN. — Porque con todas las cartas armás el uno coma once, y es más chico que este *(señala 1,2)*. Faltan nueve centavos y ya usaste todas las cartas.[17]

Para el ítem d, algunos niños suman todas las cartas, por ejemplo, Maricel, quien suma una carta de cada una de las tres, realiza este cálculo diez veces, y luego suma los resultados.



Otros calculan mentalmente que diez cartas de 0,1 arman un entero; diez de 0,01 forman 0,1; y diez de 0,001 forman 0,01. Escriben entonces la suma de los tres resultados parciales en forma de cálculo vertical u horizontal. El siguiente diálogo ilustra cómo algunos alumnos se dan cuenta de ello:

voces

(Federico dice que no sabe cómo averiguar lo que le piden en el punto 1.d.)
ALMA. — Podés sumar todo o hacer cero coma uno x diez, más cero coma cero uno por diez, más cero coma cero cero uno por diez.
AGUSTÍN. — Pero te das cuenta mirando la hoja, no más. Mirando las cartas, porque, mirá, diez de las milésimas te va a dar una centésima, obvio, diez milésimas te va a dar una centésima. Después, diez centésimas te va a dar una décima, obvio. Y diez décimas te va a dar uno.

[17] Notemos que Mauro y Agustín reconocen que 1,11 es menor que 1,2 a pesar "de tener más cifras"; un conocimiento importante relativo a la comparación de números decimales. Para un análisis más detallado de este aspecto, remitimos a la lectura del *Pre Diseño Curricular para la E.G.B., Segundo ciclo,* apartado "Números racionales".

El último procedimiento utiliza directamente la relación de equivalencia 10 - 1 entre dos posiciones contiguas, que busca promoverse a través de esta tarea. Tal relación permite a los alumnos anticipar cuántas cartas de cada valor necesitarán para conformar las cifras de las diferentes posiciones del número propuesto. La puesta en común permitió justificar y difundir para todos las relaciones que permitían anticipar el resultado sin calcular.

PROBLEMA 2[18]

La mayoría de los niños puede resolver este problema sin dificultad, escribiendo los resultados parciales (0,5 y 0,03) para luego sumarlos mentalmente o usando el cálculo horizontal o vertical.

PROBLEMA 3

En general, este problema no presenta mayores dificultades. Muchos niños lo resuelven mentalmente apoyados en el análisis de las posiciones de los números. A la altura de la secuencia en que se encuentra este problema, los alumnos ya disponen de un conjunto de conocimientos elaborados a partir de las actividades anteriores que les permiten controlar de manera eficaz los resultados que van obteniendo y las características de los números que están usando. Esto constituye una evolución de los conocimientos de los alumnos a través del avance de la secuencia. Sin embargo, ello no significa que no les haya presentado un desafío importante en el análisis del significado del número "que hay que sacar" en función de la posición que ocupa.

En cuanto a los procedimientos y escrituras utilizadas, relevamos que algunos alumnos escriben que el número que hay que restar es el 0,05 y otros 0,050 intentando "completar los lugares" para que el sustraendo tenga la misma cantidad de cifras que el minuendo.

Este problema provocó que muchos niños comiencen a hablar empleando los términos: "El lugar de los décimos, el lugar de los centésimos y el lugar de los milésimos".

En la puesta en común, se explicita cómo se controlan los lugares del número que se debe restar a partir de las relaciones establecidas. Romina y Malena explican su procedimiento del siguiente modo:

[18] Algunos alumnos obtuvieron resultados erróneos por no haber considerado la jerarquía de las operaciones, es decir que no separaban en términos para operar. Fue necesario recordarles dicho conocimiento.

voces

MALENA. — Porque si sólo restábamos cincuenta, daba otro número que no me lo acuerdo. Entonces como no daba, pusimos las mismas cifras que el otro, los restamos y nos dio. Como teníamos que restar cincuenta, en vez de restar cincuenta, le fuimos poniendo los ceros para que nos quede el cincuenta en el mismo lugar que el otro.
MAESTRA. — ¿Y para los otros?
MALENA. — Hicimos lo mismo, pero restando lo que pedía.
DANIEL. — Primero pensamos en cincuenta solo. Entonces te daba otro número. Después pensamos en ponerle cero punto cero cero. Yo primero había dicho cero punto cincuenta, pero él *(el compañero)* no me había dado bola.
MAESTRA. — ¿Y cómo hacen para saber cuál de los dos es: cero coma cincuenta o cero coma cero cincuenta?
DANIEL. — Porque el cinco tendría que estar acá *(señala la posición en el 3,452)*, en el lugar de las decenas.[19]

Malena muestra, tapando las cifras que deben quedar igual, qué número había que restar. Para 2,347 - ..... = 0.340: "Acá tenía que haber dos ceros (señalando en el primer número las cifras 3 y 4) entonces restamos así. Nos dimos cuenta por los números, les teníamos que sacar estos dos (señalando 2 y 7).

Resaltamos algunas intervenciones docentes que proponen contra-argumentaciones a las afirmaciones de los alumnos, con la finalidad de que los propios niños expliciten ciertas propiedades de los números. Por ejemplo, en una escuela, se genera el siguiente intercambio:

voces

MAESTRA. — En otro grado, algunos chicos me dijeron que para este cálculo *(donde los alumnos habían propuesto restar 0,050)* había que restar 0,05 *(lo anota)*.
(La mayoría grita que está mal).
FACUNDO Y FAVIO. — Está bien.
LUCAS. — Favio, ¡está mal!
(Algunos lo hacen en la calculadora y comienzan a decir: "Ah, está bien".)
MALENA *(que primero había dicho que estaba mal)*. — ¡Ah! Sí, está bien, porque son centésimos.
ALUMNO. — Mirá, lo hicimos con la calculadora y acá está.
TIMUR. — Si lo hacés en la calculadora, te da bien pero en la hoja no. Hay dos formas.
MAESTRA. — ¿Cómo es eso Timur? ¿Nos venís a explicar?
(Pasa al pizarrón, y cuando estaba haciendo la cuenta advierte el error.)
TIMUR. — ¡Ah! No, sí, porque cuando hacés la cuenta la coma la ponés acá *(se refiere al "encolumnamiento" de comas)*. Puse mal los números, como una resta común.

[19] Aquí fue necesario establecer con los alumnos la distinción entre las posiciones de la parte entera y decimal introduciendo –o recordando– cuál es el lugar correspondiente a los décimos, a los centésimos y a los milésimos.

ALUMNO. — Creí que estaba mal porque no nos fijamos que había un solo cero ahí *(antes del 5)*, son centésimos, yo pensé que eran milésimos.
MAESTRA. — Y para este *(3,452 - ..... = 3,052)* me decían que había que restar cero coma cuatro.
ALUMNO. — Es lo mismo.
MAESTRA. — Y, si no hacemos la cuenta, ¿podemos estar seguros de que es lo mismo?
ROMINA. — Sí, porque cuatro décimos son cuatrocientos milésimos

Vemos cómo el docente "contradice" las producciones de los alumnos buscando que se produzcan argumentaciones más convincentes, más precisas, que involucran la organización posicional de la escritura de los números decimales.

Esta tercera parte permitió a los alumnos identificar con mayor precisión cuestiones relativas al valor posicional en las escrituras decimales. Es interesante destacar que no es suficiente la resolución de los problemas para que todos los alumnos tomen conciencia de los conocimientos a los que se apunta en esta parte de la secuencia. Es el docente quien promueve el intercambio entre los alumnos focalizando sobre ciertos aspectos que busca abordar. De este modo se potencia la explicitación y el establecimiento "oficial" de las nuevas relaciones que se han profundizado.

A lo largo de este tercer momento del trabajo con los decimales, asistimos a una progresiva descontextualización de estos números, una utilización con cierta independencia de su significado en los contextos del dinero y las medidas de longitud. Sin embargo, dichos contextos siguen constituyendo una referencia en la cual los alumnos pueden apoyarse para pensar las nuevas relaciones aquí involucradas.

Cuarta parte

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1000 DE EXPRESIONES DECIMALES

TIEMPO PREVISTO: DOS CLASES

Contenidos

- Análisis y búsqueda de las razones de las regularidades cuando se multiplica o divide un número decimal por la unidad seguida de ceros.
- Relaciones multiplicativas involucradas en nuestra notación posicional a propósito de las escrituras decimales. Extensión de las relaciones ya elaboradas en el campo de los números naturales.

Se tratará de que los alumnos realicen anticipaciones anotándolas y luego verifiquen con la calculadora. Estas anticipaciones ponen en juego conocimientos que han circulado en la parte anterior de la secuencia sobre el valor posicional y la relación entre órdenes contiguos (diez de uno equivalen a uno del orden inmediato superior).

El docente propondrá los cálculos sucesivamente de tal manera que la verificación de cada uno de ellos permita a los alumnos avanzar en los procedimientos a utilizar en los siguientes.

PROBLEMA 1

a) ¿Qué resultado aparecerá en el visor de la calculadora si hacemos 0,5 x 10?
b) ¿Y si hacemos 0,05 x 10?
c) ¿Y 0,05 x 100?
d) ¿Y 0,5 x 100?

Cuando los alumnos han terminado el problema, se realiza una puesta en común en la que el docente registra en el pizarrón cada cálculo y su resultado. Propone a los alumnos que justifiquen cada uno de los cálculos propuestos. En el caso de que los niños se limiten a decir que "se corre la coma", el docente les preguntará sobre las razones de este funcionamiento. Se espera que los alumnos puedan remitirse a la relación entre décimos, centésimos y milésimos, centrándose en que, por ejemplo, como 10 veces 1/10 es igual a 1 ó 10 veces 1/100 es igual a 1/10, al multiplicar por 10 los décimos se convierten en enteros y los centésimos en décimos. Se recuperarán las relaciones ya establecidas en las situaciones anteriores. Se registran las conclusiones obtenidas.

Luego se propone el siguiente problema cuyo objetivo es que los alumnos puedan profundizar en el análisis recientemente desarrollado:

PROBLEMA 2
(parte a)

Si tuvieran en la calculadora escrito en el visor el número 3,25, ¿qué habría que hacer para que apareciera 325 sin borrar lo que se tiene y con un único cálculo? Escriban el cálculo que creen necesario realizar. Fundamenten su elección. Luego verifiquen con la calculadora.[20]

PROBLEMA 2
(parte b)

¿Y para que apareciera 0,325? ¿Y 3250? ¿ Y 32,5? Nuevamente escriban el cálculo pensado y fundamenten su elección. Verifiquen con la calculadora. Prueben con otros números nuevamente con un único cálculo. (Por ejemplo, pasar de 5,356 a 535,6 ó 0,5356, etcétera.)

Al finalizar la parte a, se propone un análisis colectivo de las anticipaciones realizadas y sus justificaciones. Se busca que en esta instancia los alumnos recuperen la idea de que "10 de un décimo hacen 1", entonces "10 de 5 décimos hacen 5". El mismo tipo de argumentación permite anticipar los resultados posteriores.

En cuanto a la parte b, presentada luego del análisis colectivo de la parte a), se espera que los

[20] Si los alumnos inician la búsqueda del cálculo tanteando sobre la calculadora en vez de intentar anticiparlo, recordar que primero deben anotarlo en la hoja y luego verificarlo.

alumnos reconozcan que en 3,25 x 100 = 325, el 3 representa el entero que, multiplicado por 100, se transforma en 300.[21]

Luego, el análisis se centra en el 0,25 x 100 apelando a diferentes argumentos en los que se retoma el significado de cada cifra en términos de fracciones decimales:

- 0,25 equivale a 25 centésimos, y 100 de estos arman 25.
- Cada centésimo por 100 es 1; 25 centésimos por 100 es 25.
- 0,25 x 100 = 0,2 x 100 + 0,05 x 100 = 20 + 5 = 25
- 0,25 x 100 = 2/10 x 100 + 5/100 x 100 = 20 + 5 = 25

Finalizado este problema se presenta el siguiente, que tiene por objetivo incluir la posibilidad de producir escrituras decimales como cociente entre enteros:

PROBLEMA 3

Con la calculadora, proponer una cuenta que dé por resultado 0,1. No se puede apretar la tecla de la coma.

¿Y otras que den por resultado 0,01; 0,2; 0,5; 3,2?

Posteriormente a la resolución de este problema se podrá volver a discutir por qué 1:10 es 0,1;[22] cuántos 0,1 se necesitan para tener 1. Se podrá recordar lo trabajado con el dinero y la medida en relación con la composición de un entero a partir de décimos o centésimos; qué número multiplicado por 10 da 1. Este mismo análisis se podrá desarrollar para 0,01.

Luego se presenta el siguiente problema cuyo objetivo es reinvertir el análisis recientemente desarrollado.

PROBLEMA 4 *(Organización de la clase: por parejas)*

Dados ciertos números en una tabla, poner cuentas en la calculadora que den por resultado dichos números, sin oprimir la tecla del punto. Es necesario plantearlo con un único cálculo. Luego de que todas las parejas han terminado, se verifican los cálculos propuestos con la calculadora. Si la cuenta propuesta es acertada, se suman 10 puntos por equipo. Juegan en parejas. Gana la pareja que obtiene más puntos.

Número	Cálculo propuesto	Resultado obtenido	Puntos
4,5			
2,204			
23,057			
0,08			
0,089			

21 Subyace a este razonamiento el uso de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma. Se está pensando 3,25 x 100 como (3 + 0,25) x 100 y 3 x 100 + 0,25 x 100. Es una extensión de esta propiedad que los niños conocen para los números naturales y que intuitivamente ponen en acto frente a los decimales. No se trata de formular formalmente esta propiedad sino de analizar con los alumnos el hecho de que funciona también para los decimales.

22 Se puede traer también la relación entre 1/10 y 1 dividido 10: "¿Cómo se hace para introducir 1/10 en la calculadora?", "¿Por qué 1/10 en la calculadora se introduce haciendo 1:10?".

Luego de que los alumnos han completado la tabla se organiza una puesta en común en la que se explicitan los razonamientos que los llevaron a esos cálculos y se formula una justificación de por qué estos funcionan.

La cuarta parte de la secuencia en las aulas

Los problemas permiten desplegar variados procedimientos de resolución que, en algunos casos, remiten a los conocimientos surgidos en problemas anteriores.

PROBLEMA 1

Para resolver este problema algunos alumnos recurren a cálculos mentales, por ejemplo, para 0,5 x 10, suman diez veces 0,5 : "Dos de cero coma cinco hacen uno" … determinando finalmente que en la calculadora aparecerá el 5. En otros casos, el recurso es la proporcionalidad, como hace Alexandra:

a) Da 5 porque

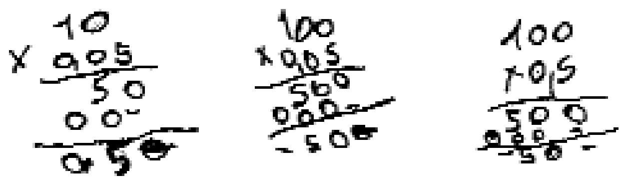
x	=
0,5 x 2	1,00
" x 4	2,00
" x 6	3,00
" x 8	4,00
" x 10	5,00

Hay algunos alumnos que disponen de la "regla de la multiplicación por la unidad seguida de ceros" haciendo, por ejemplo, "0,5 x 10 = 5,0", "corriendo la coma hacia la derecha".

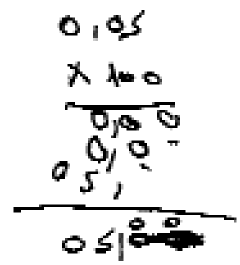
Otros combinan este procedimiento con la regla de "agregar ceros" utilizada en el campo de los naturales. De estos últimos, algunos logran ubicar correctamente la coma en el resultado y otros no, produciendo a veces sin advertirlo un resultado equivalente al factor inicial. Por ejemplo, entre los primeros, Inés y Hernán, para 0,5 x 100 = anotan 050,0 "porque se corre la coma según la cantidad de ceros".

0,5 x 100 = 050,0

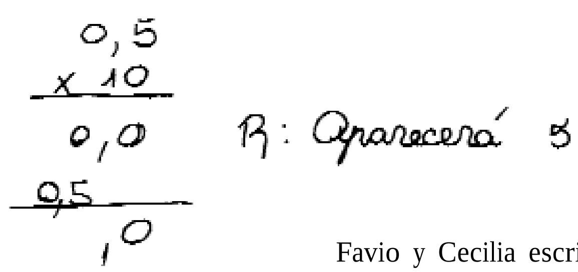
Los conocimientos producidos en los problemas anteriores permiten ejercer un control sobre los resultados. Algunos alumnos, entre los diversos procedimientos que desplegaron, recurrieron al algoritmo de la multiplicación. Recordemos que los niños no conocían la técnica convencional para la multiplicación de números decimales, pero aun así, establecieron un modo de operar procediendo como si los números no tuvieran coma y agregándola finalmente al resultado. La decisión acerca del lugar donde colocar la coma involucra cálculos mentales y un avance en los conocimientos que permiten un fuerte control sobre los resultados plausibles, como es el caso de Giselle.



Yamila coloca la coma en los resultados parciales, intenta respetar los pasos del algoritmo –incluso para la multiplicación por cero– dejando los lugares correspondientes a cada posición, pero a la vez trata de controlar el lugar donde iría la coma en los cálculos parciales para "que le aparezca" en el resultado final. Entre ambas exigencias, seguir las reglas del algoritmo de la multiplicación y controlar cuál es la parte entera y cuál la decimal, prima esta última, lo cual le permite llegar al resultado correcto.



Antonella también escribe con coma los números correspondientes a las multiplicaciones parciales. Sin embargo, la exigencia de "dejar el lugar" cuando se multiplica por dos cifras, le hace perder de vista cuál es la parte entera y cuál, la decimal. Abandona esta cuenta cuando anticipa que el resultado que obtendrá será erróneo. Luego, realizando un cálculo mental, escribe correctamente el resultado del problema. Queremos resaltar aquí el papel de la anticipación como herramienta de control en las resoluciones.



Favio y Cecilia escriben: 0,5 x 10 = 0,50. Y luego tapan con corrector ambos ceros y la coma.

¿Qué tienen en común estos procedimientos? Muchos alumnos realizan un trabajo intenso posterior sobre las escrituras parciales o finales de los resultados. En el caso de Favio y Cecilia, por ejemplo, aunque no sepamos qué es lo que los llevó a corregir su resultado, sabemos que es a partir del hecho de tenerlo escrito. En algunos casos, ese trabajo consiste en tachar ceros o agregarlos; en otros, tachar lugares, etc. Todos ellos implican un fuerte control sobre los cálculos que se están realizando. Ajustan las escrituras según los resultados ya anticipados. O sea, a partir de la objetivación que ofrece la escritura, los alumnos pueden muchas veces repensar sus procedimientos.

Ciertas interacciones entre los alumnos y con el docente permiten hacer avanzar los conocimientos hacia la explicitación de los motivos por los cuales se "corre la coma". En los momentos de intercambio colectivo, los niños suelen referirse a las situaciones anteriores (dinero, medida, cartas) para justificar los resultados de sus cálculos. Por ejemplo:

voces

ALUMNO. — Es lo mismo que hicimos con los pesos.
MAESTRA. — ¿Qué es lo mismo?
ALUMNO 1. — Si tengo diez monedas de 50 centavos, tengo 5 pesos.
(La maestra escribe en el pizarrón 0,5 x 10 = 5.)
ALUMNO 2. — Fácil. El 5 pasa delante de la coma.
ALUMNO 1. — Se corre para atrás la coma.
MAESTRA. — ¿Por qué?
ALUMNO 3. — Porque diez veces cero coma cinco es cinco.
MAESTRA. — ¿Pero por qué? ¿Qué son estos cinco? *(señalando los décimos).*
ALUMNO 4. — Yo pensé que si son 10 centavos, con diez monedas formo un peso, diez veces, veinte, son dos pesos, y así...
ALUMNO 1. — Eso ya lo hicimos.
ALUMNO 4. — Diez décimos forman uno. Veinte forman dos. Treinta forman tres.

Con respecto a las relaciones entre décimos, centésimos y milésimos al multiplicar por 10, 100 y 1000, se explicitan nuevas razones. Por ejemplo, en otra escuela, para 0,05 x 100:

voces

ALUMNO 1. — Los centésimos forman décimos y los décimos forman los enteros.
ALUMNO 2. — Yo entiendo que diez décimos forman uno, peso o metro, y que cien centésimos también forman uno. Pero me confundo cuando se mezcla.
ALUMNO 3. — No entiendo mucho cuando pasa de los décimos a los centésimos *(refiriéndose a la explicación de su compañero).*
ALUMNO 1. — Si hacés esto por diez *(señala el cinco)* pasa acá *(señalando el lugar de los décimos)*, por diez de nuevo, pasa acá *(señalando el lugar de los enteros).*
ALUMNO 3. — Ah, me parece que ya sé cómo es...

Hernán justifica el resultado de 0,05 x 100. Comienza escribiendo 0,05 x 10 = 0,5; 0,5 x 10 = 5 y explica: "Es cinco, porque cero coma cero cinco, si son diez, es cero coma cinco. Y si son diez de cero coma cinco, es cinco. Este y este (señalando los dos números diez) son los cien". Este procedimiento se basa en que multiplicar por 100 es igual a multiplicar por 10 y volver a multiplicar por 10. En otros términos, Hernán está poniendo en juego implícitamente la propiedad asociativa de la multiplicación.

En otra escuela:

voces

MAESTRA. — Explicá lo que hiciste.
ALUMNO. — Vos sabés que un centésimo por diez da décimos. Y...
OTRO ALUMNO. — Es como el problema de las cartas. Diez de cero coma cero uno es un décimo.
LUCIANA *(que había hecho 0,5 x 10 = 0,50, tal vez advierte la imposibilidad de ese resultado al encontrar que era el mismo que para 0,05 x 10 que se estaba discutiendo en ese momento. Analizando entonces su propio error dice).* — Yo me confundía. Decía cinco por diez cincuenta. Pero no, cinco décimos y cincuenta centésimos es lo mismo.
MAURO *(refiriéndose a 0,05 x 100).* — Es lo mismo que hacer cinco centésimos por diez y lo que te da por diez.
DIEGO *(escribe en el pizarrón).* — 0,5
x100
50
MAURO. — Explicámela. Yo no sé hacer cuentas con coma.
FLORENCIA. — Yo hice la cuenta en la mesa y la borré. Era una cuenta de tres "pisos". Fui corriendo un lugar y daba.

Todas estos diálogos o expresiones de los alumnos muestran el esfuerzo por comprender y comenzar a justificar algunas de las regularidades que van encontrando cuando multiplican números decimales por la unidad seguida de ceros.

PROBLEMA 2

En el intento de encontrar la solución a este problema, aparecen desplegados diversos recursos. Algunos pocos alumnos buscan el número que se puede sumar o restar para obtener el otro número. En la puesta en común será interesante promover la discusión acerca de la economía de la multiplicación o la división por la unidad seguida de ceros.

Silvano se apoya en el algoritmo pero el control del resultado lo establece a partir del contexto del dinero, de allí la escritura que aparece.

```
   3,25
 x 100
 -------
   325 00
```

Otros alumnos ensayan multiplicaciones o divisiones por 10; 100; 1000; 0,1; 0,01; etc. arribando a resultados correctos o, en algunos casos, incorrectos. Vemos, por ejemplo, los cálculos que hacen Nelson y Andrea.

3,25 x 10 = 32,5   3,25 x 100 = 325

```
  3,25    yo realizé esta cálculo
x0,100    porque el problema anterior
 0,325    era muy parecido
```

En numerosas oportunidades, los alumnos entran en el "juego" de anticipar lo que hay que hacer. Para ello recurren a argumentos que "sostengan" dichas anticipaciones. Por ejemplo, en una escuela un alumno dice: "Si hacés repartido entre diez, da treinta y dos coma cinco a cada uno. Y si hacés treinta y dos coma cinco entre diez, da tres coma veinticinco a cada uno. O sea, se va la coma para allá cada diez".

En otra escuela se escuchan argumentos como los siguientes intentando dar cuenta de cómo pasar 3,25 a 325: "Cinco son centésimos. Pasa a décimos y después pasa a cinco", "El tres era unidad y pasó a trescientos".

Muchos, para justificar cómo llegaron al resultado, explican –apoyándose en las relaciones establecidas en las situaciones de las cartas o del dinero– que con diez de cero coma diez se arma un entero. Realizan entonces equivalencias: para cualquier cantidad de décimos, al multiplicarlo por diez se obtienen enteros.

En una escuela, la docente propone a un alumno que explique a toda la clase cómo hizo para que 3,25 se "convierta" en 0,325:

voces

ALUMNO. — Cuando se multiplica, la coma va hacia la derecha. El número entonces es mayor. Y cuando se divide, la coma va al revés, hacia la izquierda y el número se achica.
MAESTRA. — ¿Qué quiere decir que el número se achica?
ALUMNO. — Porque el tres antes era tres unidades. Ahora son décimos.
OTRO ALUMNO. — Y los décimos, ahora son centésimos.
OTRO ALUMNO. — Si se corre un número, se corren todos.
OTRO ALUMNO. — Si fuera plata, ahora tengo menos que antes.

En otra escuela, dos alumnas discuten sobre el modo de pasar de 3,25 a 325:

voces

LUCIANA. — Al poner de a diez, se corre la posición *(y señala cómo el cinco de centésimos pasa a cinco unidades).*
FLORENCIA. — El cinco no es más centésimos. Cuando lo multiplico por cien pasa a ser enteros.

Vemos, a partir de estos ejemplos, cómo los alumnos se ven "forzados" a intentar dar cuenta de los motivos por los cuales la coma se corre, "despegándose" en varios de los casos de un hecho "mecánico", y apoyándose en los análisis sobre el valor posicional y la idea de décimos, centésimos y milésimos.

PROBLEMA 3

Cuando la maestra da la consigna, se registra el siguiente diálogo:

voces

ALUMNO. — ¿Cómo?¿ Hay que hacer una cuenta cualquiera?
OTRO ALUMNO. — ¿No podemos apretar la coma?
OTRO ALUMNO. — ¿Y cómo va a salir entonces? *(haciendo referencia a la coma).*
OTRO ALUMNO. — Igual no te va a dar con coma.
(Los alumnos intentan algunos cálculos y protestan porque no les sale.)
ALUMNO. — No se puede.
OTRO ALUMNO. — No da con coma.
MAESTRA. — Recuerden cuándo trabajábamos con pesos y centavos.
ALUMNO. — ¡Ah! Repartimos un peso entre diez chicos.
OTRO ALUMNO. — Ya está. Hay que dividir.

Los alumnos comienzan la búsqueda de cocientes que den 0,1. Es interesante destacar, cómo, frente a la sorpresa de los alumnos, la intervención de la maestra remitiendo a problemas anteriores y al contexto conocido del dinero permite a los alumnos evocar cálculos con números naturales en los que se podía obtener resultados decimales.

A partir de este momento los chicos dictan cálculos que den 0,1. A medida que los van diciendo, la maestra los anota en el pizarrón.

voces

ALUMNO. — Uno dividido diez.
OTRO ALUMNO. — Diez dividido cien.
OMAR. — Mil dividido cien.
OTRO ALUMNO. — Cien dividido mil.
ALUMNO. — Mil dividido cien está mal.
ALUMNO. — Diez mil dividido mil.
ALUMNO. — Cien mil dividido diez mil.
OMAR. — Mil dividido cien está mal, me equivoqué, da diez.
MAESTRA. — ¿Cómo saben acá antes de hacerlo en la calculadora que va a dar cero coma uno?

Resaltamos la fecundidad de esta intervención de la maestra pues (como podrá observarse en el diálogo transcripto a continuación) promueve que los alumnos expliciten estrategias que les garantizan la obtención del resultado solicitado sin necesidad de probarlo. Es más, no necesitan de la calculadora ya que haber elaborado dicha estrategia involucra haber tomado conciencia de que el divisor debía ser diez veces mayor que el dividendo. Retomemos el diálogo desde la intervención analizada:

voces

MAESTRA. — ¿Cómo saben acá antes de hacerlo en la calculadora que va a dar cero coma uno?
MALENA. — Porque un entero..., un décimo es justo la décima parte de uno.
MAESTRA. — ¿Y acá?... *(señalando las otras divisiones).* ¿Cómo saben?
GONZALO. — Lo que pasa es que cuando dividís diez por cien, no te alcanza, ponés cero, y ahí ...
ROMINA. — Porque como un décimo es la décima parte de uno, diez es la décima parte de cien, entonces es cero coma uno. Cien es la décima parte de mil, entonces es cero coma uno... Uno es la décima parte de diez, diez es la décima parte de cien; cien es la décima parte de mil; mil es la décima parte de diez mil.

Como posiblemente las relaciones numéricas involucradas en este problema no sean tan evidentes para todos, la maestra retoma las afirmaciones de sus alumnos, las somete a debate, e intenta, luego de que han sido validadas, difundirlas para toda la clase. Se registran en el pizarrón y en las carpetas de los alumnos las conclusiones y cálculos realizados. Posteriormente propone el problema siguiente:

voces

MAESTRA. — ¿Y si yo quiero un cálculo que me dé esto (0,01) como resultado?, ¿qué cálculo podría hacer en la calculadora?
ALUMNO. — ¿Sin usar la coma? *(refiriéndose a la tecla de la calculadora).*
MAESTRA. — Sin usar la tecla de la coma. Lo anotan y después nos fijamos en la calculadora.
SOFÍA. — Uno dividido cien.

ALUMNOS. — Siiií.
MARINA. — Porque es la centésima parte.
(Varios alumnos dan otras posibilidades de cálculo.)
FAVIO. — Diez dividido mil.
FACUNDO. — Cien dividido diez mil.
ROMINA. — Mil dividido cien mil.
MAESTRA. — ¿Cómo saben que va a dar cero coma cero uno sin hacerlo?
MALENA. — Porque es la centésima parte. Un centésimo es la centésima parte de un entero.

Nuevamente la maestra pregunta, como lo hizo anteriormente, cómo saben que va a dar el resultado sin hacer la cuenta. Dicha intervención apunta otra vez a que se fundamenten las estrategias utilizadas con el fin de promover su toma de conciencia y explicitación, por una parte, y su difusión, por la otra.

Luego se continúa con los otros números:

voces

MAESTRA. — ¿Y un cálculo que dé cero coma dos?
ROMINA. — Dos dividido diez.
FACUNDO. — Doscientos dividido mil.
MAESTRA. — ¿Y treinta y dos coma cinco?
OMAR. — Trescientos veinticinco dividido mil. *(Cuando la maestra lo anota)* Ah, no me equivoqué.
FACUNDO. — Trescientos veinticinco dividido diez.

PROBLEMA 4

En general, observamos que este problema casi no presentó dificultades. Creemos que esto se debe a que, a esta altura del trabajo en la secuencia, los conocimientos construidos a lo largo de la misma, permiten a los niños enfrentar la situación con cierta "comodidad". Este mismo problema, planteado algunas clases antes, seguramente hubiese sido un desafío interesante para la producción de conocimientos nuevos. En nuestro caso, se ha tratado de un problema donde se reinvirtieron, en una situación nueva, conocimientos ya puestos en juego.

La mayor parte de los niños en la búsqueda de cálculos para cada número realiza divisiones por la unidad seguida de ceros. Ezequiel, en cambio, para 4,5 propone como cálculo 9:2. Evidentemente el tamaño del número permite realizar ese cálculo mentalmente.

Muchos alumnos proceden copiando todas las cifras del número sin la coma, y luego escriben al lado la división por 10, 100 ó 1000, según corresponda. Esta estrategia es generalizada, a tal punto que, cuando llegan a 0,08, a muchos chicos les queda una escritura con ceros delante de los naturales.

Entre los cálculos que no son válidos de acuerdo con las reglas del juego, podemos distinguir:

a) aquellos que producen un cálculo que permite obtener el resultado solicitado pero que no respeta la restricción de no usar comas en el dividendo;

b) aquellos en los que el divisor tiene "más o menos ceros" que los que permitirían obtener el número en cuestión.

Es importante distinguirlos en tanto nos permiten considerar que no todos refieren a errores con respecto al conocimiento que se intenta poner en juego. Los alumnos que no respetan la restricción de no incluir números con coma como dividendos (caso a), de todos modos pueden haber utilizado correctamente las relaciones entre los números que se quieren hacer funcionar (cómo se transforman los números al dividirlos o multiplicarlos por la unidad seguida de ceros). En cambio, en el otro caso (b), cuando multiplican por diez en lugar de por cien o por mil, se requerirán intervenciones didácticas que permitan analizar el resultado de los cálculos propuestos.

A modo de cierre

En este documento hemos presentado "un recorrido posible" para la introducción y una profundización en el significado de los números decimales. En ese sentido, el trabajo desarrollado en las aulas pone de manifiesto cómo, a partir de un uso de los números en el contexto más familiar del dinero, se realiza un primer análisis de las escrituras decimales. Luego vimos cómo los diferentes grupos de alumnos avanzaban estableciendo nuevas relaciones, esta vez entre las fracciones y escrituras decimales, en el contexto de las medidas de longitud. En el trabajo en torno de los problemas que siguen, los alumnos se introducen en el análisis de las relaciones aditivas y, finalmente, multiplicativas involucradas en los números decimales.

Como ha sido señalado, la secuencia propuesta aborda sólo algunos contenidos vinculados a los números decimales. Pretende constituir un insumo junto con otras actividades que permitan abarcar progresivamente la complejidad de aspectos en relación con estos "números nuevos" para los niños.

Si bien la presentación de este conjunto de problemas constituye una parte importante del material, hemos querido mostrar también momentos de su desarrollo en el aula para dar cuenta del tipo de interacciones que se busca promover. En efecto, no son los problemas en sí mismos los que provocan la aparición y el progreso de los conocimientos. Las actividades que se proponen a los alumnos permitieron hacer aparecer en el aula una variedad de relaciones, procedimientos y notaciones. Y es a partir de ello que los docentes intervinieron promoviendo el debate, la circulación y el avance en los conocimientos de los alumnos. Hemos tratado en este documento de dar cuenta de ambas cuestiones: la fertilidad de los problemas y la gestión de la clase por parte de los docentes.

Nos interesa destacar que, desde la perspectiva de la enseñanza que se adopta en el *Pre Diseño Curricular*, los conocimientos de los alumnos sobre estos números no se refieren exclusivamente al dominio de la escritura, lectura y cálculo. Se ha tratado de promover además la explicitación y la progresiva profundización de relaciones numéricas involucradas. Son las interacciones sociales en la clase las que permiten este tipo de trabajo.

"Las exigencias de explicitación, de argumentación, de revisión y de validación brindan oportunidades para transformar el conocimiento y hacerlo más reconocible. Son, por esto, elementos esenciales en la constitución del sentido de los conocimientos."

La producción que aquí se comparte ha sido posible por el trabajo colectivo realizado por los maestros al analizar la secuencia y su desarrollo. Aspiramos a que este material promueva también este tipo de interacciones en el interior de cada escuela para que, además de su "uso", también abra a reflexiones conjuntas en torno del aprendizaje y la enseñanza de los números decimales en particular, y de la matemática en general. Sabemos de la potencia de los intercambios para enriquecer nuevos usos, que a su vez, habilitarán nuevas reflexiones.

Primera parte

PROBLEMA 1 (parte a)

Con monedas de los siguientes valores escribí tres maneras de pagar $3,75. (Se pueden usar varias monedas del mismo valor.)

PROBLEMA 1 (parte b)

Anotá dos o tres maneras diferentes de formar: $0, 87 y $2,08.

PROBLEMA 2 (parte a)

Para resolver en parejas: "Si recibís un premio de quince monedas de 10 centavos, siete monedas de 25 centavos y trece monedas de 50 centavos, ¿cuánto dinero recibiste?".

PROBLEMA 2 (parte b)

"Un chico recibió otro premio con las siguientes monedas: doce de 10 centavos, dos de 1 peso, ocho de 1 centavo y tres de 25 centavos. Para saber cuánto había ganado hizo cálculos con la calculadora y obtuvo el siguiente resultado: 4,03. Sabemos que el resultado es correcto. ¿Qué cálculos pudo haber hecho para obtener en el visor de la calculadora ese número? Anotalos y verificalos con tu calculadora".

PROBLEMA 3

Si sólo tuvieras monedas de 10 centavos, ¿cuántas necesitarías para pagar justo estas cantidades?:

a) $1; b) $0,80; c) $2,20; d) $12,50; e) $4,25; f) $4,03; g) $0,05.

PROBLEMA 4 (parte a)

Se quiere repartir $1 entre diez chicos, de manera que todos reciban la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

- ¿Y si se quisieran repartir $2 entre diez?
- ¿Y si fuesen $5 entre diez? ¿Y $2,5?
- ¿Cuánto le tocaría a cada uno si fuesen $0,80?
- ¿Y si fuesen $0,10?

PROBLEMA 4 (parte b)

- Si pago 10 centavos con una moneda de $ 1, ¿cuánto me dan de vuelto? ¿Cómo escribirías en la calculadora una cuenta que te dé la respuesta?
- Tengo 2 pesos con 73 centavos y necesito llegar a 3 pesos, ¿cuánto me falta? ¿Qué cuenta habría que hacer en la calculadora? Anotala y luego comprobalo.
- ¿Cuánto es necesario agregar si tengo 2 pesos con 3 centavos y necesito 3 pesos? ¿Cómo sería la cuenta en la calculadora?

PROBLEMA 5

Con tres monedas de $ 0,50, tres monedas de $ 0,25 y tres monedas de $ 0,10; ¿se pueden pagar justo las siguientes cantidades? ¿Cómo? Anotalas.

$ 1, 80
$ 2, 45
$ 1, 05
$ 1, 15
$ 2, 60

¿Será posible hacerlo de diferentes maneras? También anotalas.

Segunda parte

PRIMERA FASE
Restricciones en la unidad de medida y utilización de fracciones con denominador 10, 100 ó 1000

Las reglas de juego de esta fase son similares a las mencionadas en la actividad de familiarización propuesta. En el caso de no haber realizado aquella, será necesario plantear aquí las reglas de juego. Se agregan ahora dos nuevas restricciones para la elaboración de los mensajes: hay que dar la información en metros y solamente se pueden usar fracciones con denominador 10, 100 ó 1000.

Se distribuyen ahora los segmentos de 19 cm y 20 cm del siguiente modo: para los equipos A, C y E, el de 19 cm, y para los otros tres, el de 20 cm. Se espera que los alumnos produzcan mensajes como los siguientes: para el de 20 cm, 2/10m; 20/100 m; dos de 1/10 m; veinte de 1/100 de metro. Algunos posibles errores en relación con este segmento son 2/100 m o 20/10 m.

Luego intercambian los mensajes y se verifican por superposición si han encontrado el segmento correspondiente. Si no se superponen, se realiza un primer análisis entre los equipos que se han intercambiado el mensaje. Se les propone encontrar en dónde residió la dificultad: ¿hubo errores en el mensaje?, ¿se entendió el mensaje?, ¿qué debería haber dicho el mensaje para saber seguro de qué segmento se trataba?, ¿estaba bien el mensaje y fue mal interpretado?, ¿qué es lo que entendieron los que lo leyeron?, etcétera.

En la puesta en común se analizan las dificultades que encontraron para elaborar el mensaje y se analizan las diferentes escrituras. En este momento, el docente recupera lo realizado con el dinero en relación con las equivalencias: qué parte del metro es 10 cm; qué parte del metro es 1 cm y qué parte del metro es 1 mm, y se establecen las equivalencias correspondientes. Por ejemplo, "para 19 cm se puede escribir 19/100 de metro o 190/1000 de metro".

El maestro podrá proponer ahora a los alumnos que, en parejas, escriban cómo sería un mensaje para un segmento de 23 cm o para segmentos de otras medidas. Esta actividad tiene por finalidad reinvertir los conocimientos que han circulado en la puesta en común.

Luego, el maestro les solicita escribir otro mensaje para segmentos de 1,5 cm y 2,3 cm. Tendrán que utilizar aquí necesariamente escrituras con milésimos de metros. Por ejemplo, para 1,5 cm, 15/1000 de metro (o bien, 1/100 de metro y 5/1000 de metro, escritura que se abordará en la fase siguiente).

SEGUNDA FASE
Utilización de expresiones aditivas de fracciones decimales

Nuevamente se juega repartiendo a cada grupo una hoja con todos los segmentos y una hoja con un solo segmento. Esta vez, los segmentos que reciben tres de los grupos son de 14 cm y, los otros tres grupos, de 15 cm. Se les dice a los alumnos que se ha agregado una restricción más: en las fracciones solamente se pueden utilizar numeradores de una sola cifra.

La intención es que los alumnos puedan "desarmar" el 0,14 metros o 14 cm apelando a escrituras del tipo 1/10 m + 4/ 100 m o bien 1/10 y 4 de 1/ 100. Es posible que aparezcan también las siguientes escrituras erróneas: 1/100 m + 4/100 m.

Otras escrituras aditivas válidas son descomposiciones como las siguientes que, si bien no se corresponden con los valores de cada cifra en la notación decimal, sí respetan las restricciones propuestas:

Por ejemplo, para un segmento de 14 cm:
8/100 + 6/100
7/100 + 7/100
9/100 + 1/100 + 4/100

En la puesta en común podrán retomarse estas escrituras vinculándolas con aquellas que se corresponden con las notaciones decimales: 1/10 + 4/100 o también 10/100 + 4/100. En la discusión colectiva se analizan las diferentes escrituras, se establece cuáles son correctas y cuáles no lo son y por qué. Se establece la equivalencia entre las diferentes escrituras correctas.

Luego se analiza la relación entre la escritura decimal y la fraccionaria. Por ejemplo, en la escritura 0,14, el número 1 representa 1/10 y el número 4 representa 4 de 1/100, o sea, 4/100. Se plantea entonces que 0,14 es igual a 1/10 + 4/100. El maestro introduce la notación decimal sobre la base de las relaciones producidas: la primera posición después de la coma corresponde a los décimos de metro, y la segunda, a los centésimos de metro.

TERCERA FASE
Reinversión de los conocimientos que se han puesto en juego en la fase anterior

A continuación el docente puede proponer diferentes problemas:

- Escribir mensajes para nuevos segmentos hipotéticos. Por ejemplo: escribir cómo sería el mensaje para cada uno de estos segmentos: 0, 57 m; 1,06 m; 3,4 cm; 3 mm; 2,39 m; etc. habilitando la escritura de enteros (2 m + 3/10 m + 9/100 m).
- Dibujar segmentos a partir de longitudes dadas. Por ejemplo: 2/10 metro + 5/100 metro; 1/10 metro + 5/1000 metro; 4/100 metro + 5/1000 metro.
- Comparar medidas expresadas en números decimales con otras expresadas en fracciones. Por ejemplo: "Tengo un segmento de 0, 63 m, y otro de 6/10 de metro y otro de 8/100 de metro. ¿Cuál es más largo?".

Tercera parte

PROBLEMA 1

Si tuvieran un mazo con las siguientes cartas:

- 10 cartas de 0,1
- 10 cartas de 0,01
- 10 cartas de 0,001

a) ¿Con cuáles cartas armarías los siguientes números: 0,2; 0,03; 0,005; 0,25 y 0,375?

b) Juan usó 3 cartas de 0,001, 3 de 0,1 y 4 de 0,01. ¿Qué número armó?

c) Intenten armar el 1,02 de dos maneras diferentes. ¿Y el 1,2?

d) ¿Qué número se arma con las treinta cartas juntas?

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

PROBLEMA 2

Un nene hizo el siguiente cálculo para saber qué número se arma con las cartas que tiene: 5 x 0,1 + 3 x 0,01. ¿Cuál era el número?

PROBLEMA 3

Si en el visor de la calculadora escriben el número 3,452, ¿qué deberé hacer con la máquina para que aparezca el número 3,402 sin borrar? ¿Y para que aparezca el 3,052?
Si en el visor de la calculadora está el número 2,347, ¿qué deberé hacer para que aparezca el número 2,007 sin borrar?

Cuarta parte

PROBLEMA 1

a) ¿Qué resultado aparecerá en el visor de la calculadora si hacemos 0,5 x 10?
b) ¿Y si hacemos 0,05 x 10?
c) ¿Y 0,05 x 100?
d) ¿Y 0,5 x 100?

PROBLEMA 2
(parte a)

Si tuvieran en la calculadora escrito en el visor el número 3,25, ¿qué habría que hacer para que apareciera 325 sin borrar lo que se tiene y con un único cálculo? Escriban el cálculo que creen necesario realizar. Fundamenten su elección. Luego verifiquen con la calculadora.

PROBLEMA 2
(parte b)

¿Y para que apareciera 0,325? ¿Y 3250? ¿ Y 32,5? Nuevamente escriban el cálculo pensado y fundamenten su elección. Verifiquen con la calculadora. Prueben con otros números nuevamente con un único cálculo. (Por ejemplo, pasar de 5,356 a 535,6 o 0,5356, etcétera.)

PROBLEMA 3

Con la calculadora, proponer una cuenta que dé por resultado 0,1. No se puede apretar la tecla de la coma.

¿Y otras que den por resultado 0,01; 0,2; 0,5 ; 3,2?

PROBLEMA 4

Dados ciertos números en una tabla, poner cuentas en la calculadora que den por resultado dichos números, sin oprimir la tecla del punto. Es necesario plantearlo con un único cálculo. Luego de que todas las parejas han terminado, se verifican los cálculos propuestos con la calculadora. Si la cuenta propuesta es acertada, se suman 10 puntos por equipo. Juegan en parejas. Gana la pareja que obtiene más puntos.

Número	Cálculo propuesto	Resultado obtenido	Puntos
4,5			
2,204			
23,057			
0,08			
0,089			

Bibliografía

BROUSSEAU, G. *Problèmes d´enseignement des décimaux*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 1.1 y 2.1, Grenoble, La Pensée Sauvage, 1980-1981.

BROUSSEAU, G. y BROUSSEAU, N. *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Université de Bordeaux, 1987.

CARRAHER, T.; CARRAHER, D. y SCLIEMANN, A. *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo XXI, 1991.

CENTENO, J. *Números decimales: ¿Por qué? ¿Para qué?,* Madrid, Síntesis, 1988.

FERREIRO, E. "El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria", cap. VI en *Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso*, Buenos Aires, Centro Editor de América Latina, 1986.

GOBIERNO DE LA CIUDAD DE BUENOS AIRES, Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Currícula. *Matemática. Documento de trabajo nº4.* Actualización curricular, 1997.
— *Matemática. Documento de trabajo nº5. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo.* Actualización curricular, 1998.
— *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. Marco General,* 1999.
— *Pre Diseño Curricular para la Educación General Básica. Segundo ciclo*, 1999.

PARRA, C. “Cálculo mental en la escuela primaria”, en Parra y Sáiz (comps.), *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994.