



Segundo
ciclo

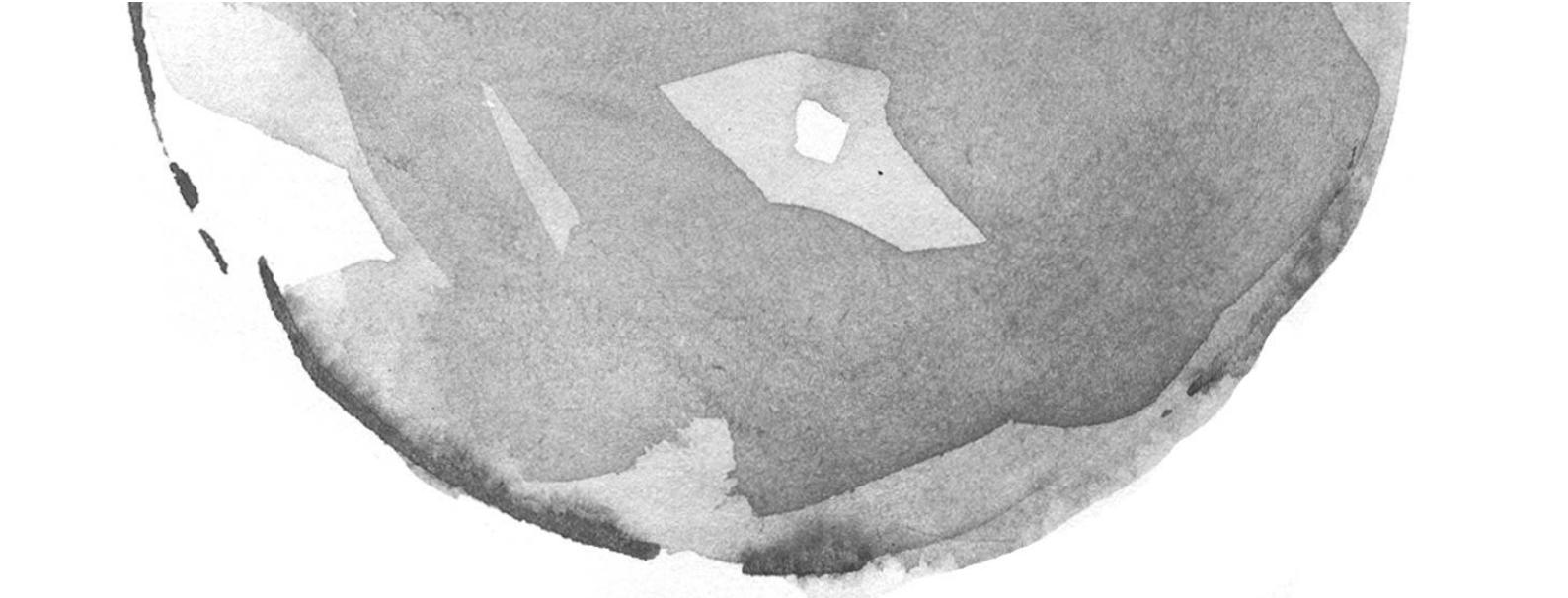
Matemática

Cálculo mental con números racionales

Aportes para la enseñanza

ESCUELA PRIMARIA





Segundo
ciclo

Matemática

Cálculo mental con números racionales

Aportes para la enseñanza
ESCUELA PRIMARIA



Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección de Currícula y Enseñanza
Matemática : cálculo mental con números racionales. - 2a ed. - Buenos Aires:
Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Dirección de Currícula y Enseñanza, 2010.
72 p. ; 30x21 cm. - (Aportes para la enseñanza. Escuela Primaria. Segundo ciclo)
ISBN 978-987-549-457-2
1. Matemática. 2. Enseñanza Primaria. I. Título
CDD 372.7

Reedición de *Cálculo mental con números racionales*, título publicado en la serie "Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007"

ISBN: 978-987-549-457-2
© Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires
Ministerio de Educación
Dirección General de Planeamiento Educativo
Dirección de Currícula y Enseñanza, 2010
Hecho el depósito que marca la Ley 11.723

Esmeralda 55, 8º piso
C1035ABA - Buenos Aires
Teléfono/Fax: 4343-4412
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

Permitida la transcripción parcial de los textos incluidos en este documento, hasta 1.000 palabras, según Ley 11.723, art. 10º, colocando el apartado consultado entre comillas y citando la fuente; si este excediera la extensión mencionada, deberá solicitarse autorización a la Dirección de Currícula y Enseñanza.
Distribución gratuita. Prohibida su venta.

Jefe de Gobierno
Mauricio Macri

Ministro de Educación
Esteban Bullrich

Subsecretaria de Inclusión Escolar y Coordinación Pedagógica
Ana María Ravaglia

Directora General de Planeamiento Educativo
María de las Mercedes Miguel

MATEMÁTICA. Cálculo mental con números racionales.

Segundo ciclo

Aportes para la enseñanza. Escuela Primaria

Reedición de *Cálculo mental con números racionales*, título publicado en la serie “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza 2004-2007”.

Dirección de Currícula y Enseñanza

Gabriela Polikowski

Coordinación de Educación Primaria

Susana Wolman

Adriana Casamajor

Elaboración del material

Coordinación del documento original

Patricia Sadovsky

Especialistas

María Emilia Quaranta

Héctor Ponce

Lectura para reedición

Horacio Itzcovich

Edición a cargo de la Dirección de Currícula y Enseñanza

Coordinación editorial: Paula Galdeano

Edición: Gabriela Berajá, María Laura Cianciolo, Marta Lacour, Virginia Piera y Sebastián Vargas

Coordinación de arte: Alejandra Mosconi

Diseño gráfico: Patricia Leguizamón y Patricia Peralta

Apoyo administrativo: Andrea Loffi, Olga Loste, Jorge Louit y Miguel Ángel Ruiz

Distribución y logística: Marianela Giovannini

Presentación

El Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, comprometiéndose con la provisión de recursos de enseñanza y materiales destinados a maestros y alumnos, presenta a la comunidad educativa la reedición de los siguientes documentos curriculares para el trabajo en las aulas de segundo ciclo en el área de Matemática.

Matemática. Fracciones y números decimales: integrado por un conjunto de documentos destinados a cada grado del segundo ciclo, en los que se aborda el tratamiento didáctico de los números racionales contemplando el complejo problema de su continuidad y profundización a lo largo del ciclo.

En su versión original –elaborada en el marco del “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza en Segundo Ciclo del Nivel Primario”– la serie estaba compuesta por *Apuntes para la enseñanza*, destinados a docentes de 4º, 5º, 6º y 7º grado, y de *Páginas para el alumno* de 4º a 6º grado. Cada documento de *Apuntes para la enseñanza* está organizado en actividades que implican una secuencia de trabajo en relación con un contenido. En cada actividad los docentes encontrarán una introducción al tema, problemas para los alumnos, su análisis y otros aportes que contribuyen a la gestión de la clase. En la presente reedición las páginas para el alumno se encuentran incluidas en el documento para los docentes a modo de anexo.

Cabe aclarar que la elección de números racionales obedece –como puede leerse en la “Introducción”– a varias razones: es un campo de contenidos complejo, ocupa un lugar central en la enseñanza en segundo ciclo, y la propuesta formulada en el *Diseño Curricular para la Escuela Primaria 2004* plantea modificaciones al modo en el que se concibió su tratamiento didáctico en la escuela durante mucho tiempo. Por ello, se requieren para su enseñanza materiales más cercanos al trabajo del aula y que puedan constituir un aporte para abordar su articulación y evolución a lo largo del ciclo.

Matemática. Cálculo mental con números naturales y *Matemática Cálculo mental con números racionales*. Estos documentos, también elaborados en el marco del “Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza en Segundo Ciclo del Nivel Primario”, constituyen referentes para los docentes del segundo ciclo: el primero se encuadra en los contenidos de 4º y 5º grado, y el relativo a números racionales está orientado a 6º y 7º grado. Sin embargo, cabe la posibilidad de que los alumnos de 6º y 7º grado que hayan tenido poca experiencia de trabajo con el cálculo mental tomen contacto con algunas de las propuestas incluidas en el documento sobre números naturales.

Los materiales constan –además de una introducción teórica sobre la concepción del cálculo mental, las diferencias y relaciones entre el cálculo mental y el algorítmico, reflexiones acerca de la gestión de la clase, etc.– de secuencias de actividades para la enseñanza del cálculo mental y análisis de algunos de los procedimientos que frecuentemente despliegan los alumnos de 4º/5º y 6º/7º respectivamente.

En ambos documentos se proponen actividades que involucran conocimientos que han sido objeto de construcción en años precedentes o en ese mismo año a través de situaciones que han permitido darles un sentido, con la intención de retomarlos en un contexto exclusivamente numérico para analizar algunas relaciones internas e identificar aspectos de esos cálculos y relaciones. Por esa misma razón encontrarán en el documento de *Matemática. Cálculo mental con números racionales* referencias a los documentos *Matemática. Fracciones y números decimales* ya mencionados.



índice

Introducción.....	9
Cálculo mental y cálculo algorítmico	9
Dos clases de conocimientos en el trabajo sobre cálculo mental	11
La actividad matemática en el aula a propósito del cálculo mental.....	12
La gestión docente de las clases de cálculo mental	13
El uso de la calculadora.....	14
Acerca de este documento	15
Cálculo mental con fracciones	17
ACTIVIDAD 1. Comparación de fracciones	17
ACTIVIDAD 2. Fracciones: sumas y restas	22
ACTIVIDAD 3. Multiplicación y división de una fracción por un número natural	24
ACTIVIDAD 4. Fracción de una colección de objetos	28
ACTIVIDAD 5. Fracciones decimales	30
Cálculo mental con números decimales	33
ACTIVIDAD 1. Números decimales y fracciones decimales	33
ACTIVIDAD 2. Relaciones de orden en los números decimales	35
ACTIVIDAD 3. Sumas y restas: una oportunidad para analizar escrituras decimales	38
ACTIVIDAD 4. Encuadrar e intercalar números decimales	47
ACTIVIDAD 5. Los números decimales y la multiplicación y la división por 10, 100 y 1.000.....	51
ACTIVIDAD 6. Multiplicar y dividir por 0,1, 0,01 y 0,001.....	58
ACTIVIDAD 7. Multiplicación de un número decimal por un número natural	60
ACTIVIDAD 8. Multiplicación de dos números decimales entre sí	61
ACTIVIDAD 9. Algunas multiplicaciones particulares	63
ACTIVIDAD 10. Estimaciones.....	63
ACTIVIDAD 11. Porcentajes	65





Introducción

Este documento, junto con *Cálculo mental con números naturales*, integra una colección de materiales para el segundo ciclo que se publicaron en el marco del Plan Plurianual para el Mejoramiento de la Enseñanza en el Segundo Ciclo del Nivel Primario. A través de este material, se propone discutir bajo qué condiciones didácticas el cálculo mental puede constituirse en una práctica relevante para la construcción del sentido de los números y las operaciones. Se busca, además, compartir con los docentes algunas secuencias de trabajo posibles, entre las muchas que se podrían diseñar.

CÁLCULO MENTAL Y CÁLCULO ALGORÍTMICO

Desde la perspectiva propuesta en el *Diseño Curricular*,² los procedimientos de cálculo mental se definen por contraste con aquellos que responden a cálculos algorítmizados. Estos últimos consisten en una serie de reglas aplicables en un orden determinado, siempre del mismo modo, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar el resultado buscado en un número finito de pasos. Las cuentas convencionales que se utilizan para resolver las operaciones constituyen procedimientos de este tipo: en ellas se recurre a una única técnica para una operación dada, siempre la misma, independientemente de cuáles sean los números en juego. Dentro de estos últimos podemos mencionar, por ejemplo, el algoritmo para obtener fracciones equivalentes, consistente en multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número; el algoritmo de división de fracciones; el algoritmo de división de un número decimal por otro número decimal; etcétera.

El cálculo mental, en cambio, refiere al "conjunto de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados".³ Es decir, se caracteriza por la presencia de una diversidad de técnicas que se adaptan a los números en juego y a los conocimientos (o preferencias) del sujeto que las despliega.

Examinemos las características del cálculo mental en relación con el cálculo algorítmico a partir de un par de ejemplos:

- a) La tarea de comparar dos fracciones puede ser abordada siempre a partir del recurso general de "llevárlas" a común denominador y comparar los numeradores. Sin embargo, en algunos casos particulares, existen estrategias más económicas que el procedimiento general. Por ejemplo, si se tratara de comparar $\frac{2}{3}$ con $\frac{7}{5}$,

2 G.C.B.A., Secretaría de Educación, Dirección General de Planeamiento, Dirección de Curricula, *Diseño Curricular para la Escuela Primaria. Segundo ciclo de la Escuela Primaria/Educación General Básica*, 2004, tomos 1 y 2.

3 Parra, Cecilia. "El cálculo mental en la escuela primaria", en C. Parra e I. Saiz (comps.), *Didáctica de la matemática. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós, 1994.

es interesante que los niños reparen en que la primera fracción es menor que 1 y la segunda es mayor. Obviamente no se trata de que los alumnos mecanicen estas estrategias que son útiles sólo para casos particulares, sino de que tengan un amplio repertorio de procedimientos posibles y de que construyan una posición activa que no los deje pendientes de una única posibilidad.

b) ¿Cuánto es $11 - 1,9$? Podría responderse apelando al algoritmo de la resta:

$$\begin{array}{r} 11,0 \\ - 1,9 \\ \hline 9,1 \end{array}$$

Sin embargo, forma parte de una posición sólida con relación a lo numérico poder establecer que 1,9 es próximo a 2 y aprovechar esa relación para resolver el cálculo. Se presentan diversas posibilidades:

- Calcular el complemento de 1,9 a 11, "llegando" primero a un número natural:

$$1,9 + 0,1 = 2 \quad \text{y} \quad 2 + 9 = 11, \text{ entonces se suma } 0,1 + 9 = 9,1$$

- Restar 2 a 11 para luego agregar 0,1:

$$11 - 2 = 9 \text{ y } 9 + 0,1 = 9,1$$

Aquí puede observarse que la distinción entre cálculo algorítmico y cálculo mental no reside en que el primero sea escrito y el segundo no se apoye en el uso de lápiz y papel. Como mencionamos anteriormente, el cálculo algorítmico utiliza siempre la misma técnica para una operación dada, cualesquiera sean los números. En cambio, cuando se propone un trabajo de cálculo mental no se espera una única manera posible de proceder. La idea es instalar una práctica que requiera diferentes estrategias basadas en propiedades de las operaciones. Al desplegar estas estrategias en una situación específica, se hace posible el análisis de las relaciones involucradas en las mismas.

Los algoritmos convencionales también apelan a propiedades de los números y de las operaciones, sólo que, una vez automatizados los mecanismos, no es necesario tenerlas en cuenta.

El cálculo mental, al exigir la puesta en juego de estrategias específicas en función de los números con los que se trabaja, habilita un mayor control de las propiedades que hacen válida la estrategia que se despliega.

Por otro lado, como se verá a lo largo de este documento, para que los alumnos produzcan estrategias de cálculo mental cada vez más elaboradas es necesario que puedan apoyarse tanto en el conocimiento de las propiedades de las operaciones como en resultados que deberán tener disponibles en su memoria.

El hecho de que el cálculo mental se distinga del cálculo algorítmico no supone que se oponga a él; todo lo contrario, los conocimientos construidos acerca de uno y otro tipo de cálculo se alimentan recíprocamente. Es finalidad de la escuela que los alumnos se apropien de los algoritmos convencionales para resolver las operaciones. Todo cálculo algorítmico contempla momentos de apelación al cálculo mental y se enriquece con sus aportes, tanto para anticipar y controlar la magnitud del resultado como para comprender el sentido de sus pasos.

Los algoritmos convencionales constituyen técnicas de cálculo valiosas por la economía que procuran y por el alivio que supone la automatización de ciertos mecanismos. La riqueza del trabajo sobre el cálculo —mental y algorítmico— incluye el hecho de que los alumnos se ven confrontados a tener que decidir la estrategia más conveniente frente a cada situación en particular. Apuntamos a una automatización, pero en simultáneo con un largo trabajo de elaboración y de reflexión sobre las razones que fundamentan los mecanismos. Al mismo tiempo, la disposición de ciertos mecanismos automatizados enriquece las posibilidades de cálculo mental.

En otros términos, el cálculo no algoritmizado abona la construcción de relaciones que permiten un aprendizaje de los procedimientos convencionales basado en la comprensión de sus pasos, en un control de los resultados intermedios y finales que se obtienen. Al mismo tiempo, la finalidad de transmitir los algoritmos vinculados a las operaciones se inserta en el marco de la transmisión de un amplio abanico de recursos de cálculo y de su adecuación con las situaciones que enfrentan los niños. La práctica de cálculo mental, bajo ciertas condiciones, hace evolucionar los procedimientos de cálculo de los alumnos y enriquece las conceptualizaciones numéricas de los niños.⁴

DOS CLASES DE CONOCIMIENTOS EN EL TRABAJO SOBRE CÁLCULO MENTAL

En el trabajo con cálculo mental es posible distinguir dos aspectos: por un lado, la sistematización de un conjunto de resultados y, por el otro, la construcción de procedimientos personales. Veamos en qué consiste cada uno de ellos. En el caso de las fracciones y de los números decimales, esperamos que, a lo largo de todo el segundo ciclo, los alumnos puedan llegar a disponer de:

a) Algunos resultados memorizados o fácilmente recuperables, como:

- sumas y restas que involucren medios y cuartos;
- la mitad y el doble de una fracción;
- complementos de los décimos; centésimos a las unidades de orden superior ($0,3 + \dots = 1$; $0,34 + \dots = 0,4$; etc.);
- resultados de sumar o restar $0,1$; $0,01$; $0,001$; etc.;
- sumas y restas que compongan $0,25$; $0,50$; $0,75$;
- multiplicación y división de cualquier número por 10 ; 100 y 1.000 ;
- multiplicación y división por $0,1$; $0,01$; $0,001$.

En suma, es también un objetivo del cálculo mental que los alumnos memoricen ciertos resultados o puedan recuperarlos fácilmente. Insistimos en que esta memorización debe apoyarse en la construcción y la identificación previa de relaciones que tejan una red desde la cual sostenerla y darle sentido.

b) Procedimientos "más personales", que permiten dar respuesta a una situación. Este aspecto ha sido denominado "cálculo pensado" o "reflexionado".⁵ Al no tratarse de procesos automatizados, consisten en el despliegue de diferentes caminos a partir de decisiones que los alumnos van tomando durante la resolución. Tales decisiones se vinculan a la comprensión de la tarea, con diferentes relaciones que se establecen, con el control de lo que va sucediendo en la resolución.

4 Butlen, Denis y Monique Pezard. "Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2". *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12, N° 2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage, pp. 319-367, 1992.

5 Institut National de Recherche Pédagogique (ERMEL): *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*. Paris, Hatier, 2001.

Por ejemplo, para responder "¿cuánto es necesario restar a $\frac{7}{4}$ para obtener 1?", es posible pensar en que 1 es equivalente a $4/4$, entonces será necesario restarle $\frac{3}{4}$.

Para averiguar la mitad de 2,3, es posible pensar 2,3 a partir de diferentes descomposiciones: $2 + 0,3$; $2 + 0,30$; $2,2 + 0,1$; etc. Sumando la mitad de cada una de esas "partes" del número, se obtiene la mitad de todo el número: 1,15.

El cálculo mental permite, a su vez, un trabajo sobre los números de manera descontextualizada, familiariza a los alumnos con una actividad matemática que también encuentra sentido en sí misma: hallar un procedimiento, confrontar diferentes estrategias, analizar su validez. Pone a los niños en situación de "vérse las con los números", de expresar un mismo número de diferentes maneras. Por ejemplo, "establecer cuáles de las fracciones de esta lista equivalen a números enteros: $\frac{30}{10}$; $\frac{27}{100}$; $\frac{200}{10}$; $\frac{25}{10}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{8}{2}$ " requiere analizar el significado de cada una de las fracciones, de las relaciones entre numerador y denominador. Por ejemplo, si $\frac{10}{10}$ es igual a 1 entero, $\frac{30}{10}$ equivalen a 3; etcétera.

De este modo, la enseñanza del cálculo mental también ofrece a los alumnos la oportunidad de tomar conciencia de que algunos cálculos son más sencillos que otros, y de que es posible valerse de ellos para resolver otros más complejos. Por ejemplo, $5,3 \times 40$ puede resolverse a partir de hacer $5,3 \times 4 \times 10 = 5,3 \times 10 \times 4 = 53 \times 4 = 212$.

El análisis de la validez de las reglas aplicadas en cada caso resultará de un trabajo de reflexión sobre las resoluciones que el docente gestione con toda la clase.

Dentro de las estrategias de cálculo mental, también se espera que los alumnos desarrollen, basándose en cálculos más sencillos, estrategias de cálculo aproximado. Por ejemplo, para $121 - 9,36$, es posible anticipar que el resultado será algo mayor que 111, porque se está restando un poco menos que 10. Para algunas situaciones, la búsqueda de un resultado aproximado es suficiente; otras requieren hallar un resultado exacto. Para estas últimas, el cálculo aproximado constituye una poderosa herramienta de anticipación y de control. Para que los alumnos comiencen a ponerla en juego es necesario —aunque no suficiente— que el docente "empuje" en esa dirección.

LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN EL AULA A PROPÓSITO DEL CÁLCULO MENTAL

Las decisiones a cargo del alumno que resuelve, los análisis que puede hacer mientras trabaja, las discusiones acerca de la validez de sus razonamientos con sus pares y con el docente, van tejiendo una red de conocimientos que fundamentan el funcionamiento de los números y de las operaciones. Abrir el juego de la clase a la búsqueda de estrategias, a su explicitación y confrontación, a su circulación y difusión en momentos de intercambio, permite a los alumnos —ayudados por el docente— identificar los conocimientos valiosos relativos a los números y a los cálculos. Al mismo tiempo, los niños participan de la construcción de criterios de validación de los procedimientos elaborados (cómo es posible estar seguro de que una estrategia es correcta, cómo mostrar el error de un procedimiento) y de criterios de elección de procedimientos adecuados en función de la tarea. De este modo, a través de un tipo de práctica se está comunicando a la clase que se espera que las producciones sean validadas y que hay modos de hacerlo, que hay razones que hacen a la corrección o incorrección de las resoluciones, que hay criterios para la selección de modos de resolver más o menos adaptados en función de las situaciones particulares, que no se trata de hechos azarosos. Estos aspectos

podrán ser objeto de reflexión en la clase para que puedan ser identificados por los alumnos.

Es decir, del mismo modo que para todo el trabajo matemático, se apunta a posicionar a los alumnos desde cierta actitud intelectual frente a los problemas para que se animen a abordar la tarea con los conocimientos disponibles, a explorar, buscar por diferentes vías, equivocarse, comunicar a otros, analizar la validez de procedimientos, etc. A veces se cree que este posicionamiento depende de aptitudes o voluntades particulares de los alumnos; desde nuestra perspectiva, constituye un aprendizaje que se logra por un tipo de práctica sostenida en el tiempo.

LA GESTIÓN DOCENTE DE LAS CLASES DE CÁLCULO MENTAL

La enseñanza del cálculo se enmarca, pues, en el mismo "clima" de trabajo matemático que queremos instalar en las clases: búsquedas, reflexiones, discusiones, argumentaciones, producción y análisis de escrituras matemáticas e identificación de nuevos conocimientos. En este sentido, la intervención del docente es fundamental: hacer explicitar y comparar los procedimientos para llevar a los alumnos a analizarlos y explicarlos —colaborando él mismo en estas tareas— constituyen condiciones esenciales para promover avances en los conocimientos producidos en este espacio.

El despliegue del trabajo que se propone no puede quedar relegado a clases aisladas, sino que es necesario organizar una progresión de aprendizajes, planificar una secuencia de enseñanza en la cual cada nuevo conocimiento pueda apoyarse en lo que los alumnos ya conocen, al mismo tiempo que introduce novedades y es, por su parte, base para nuevos aprendizajes. Esto requiere de un proyecto de enseñanza cuya globalidad el docente pueda concebir.

Un proceso de esta naturaleza requiere considerar tiempos de adquisición a largo plazo, con secuencias que involucren una variedad de situaciones que se ocupen de diferentes aspectos de los conceptos y, a la vez, retomen cuestiones tratadas en sucesivas vueltas.

Si bien los avances en los recursos de cálculo mental son beneficiosos para todos, lo son en particular para aquellos alumnos que presentan mayor dificultad, porque les permite acceder a estrategias que, a veces, otros alumnos elaboran por su cuenta; estrategias que los posicionan mejor ante las situaciones, ya sea porque les abre diferentes posibilidades de solución o porque les permite realizar anticipaciones y llevar un control sobre las soluciones más convencionales.

Puede resultar paradójico que el cálculo mental beneficie más a quienes tienen mayor dificultad para acceder a él. En efecto, a estos alumnos les suele insumir mucho tiempo la apropiación de estrategias que otros adquieren muy rápidamente. Sin embargo, como son estos mismos alumnos quienes con frecuencia no recuerdan las técnicas ("¿cómo se hacían?") o pierden control sobre ellas (se olvidan un paso o cometan un error, no saben cómo continuar o corregir), son particularmente relevantes las intervenciones del docente dirigidas a la difusión, identificación y práctica de ciertos procedimientos de cálculo mental para generar avances en los alumnos que se presentan como "más flojos".

¿Cómo gestionar esta diversidad? No hay evidentemente una única posibilidad. La organización de las clases deberá planificarse de acuerdo con las intenciones del docente frente a cada situación en particular. A veces, conviene proponer el trabajo en parejas, para promover intercambios en el momento de resolución; en otras

ocasiones, el trabajo individual, para que cada niño tenga la oportunidad de interactuar solo frente al problema; y otras, con toda la clase; etcétera.

Cuando se trabaja colectivamente, suele ocurrir que los alumnos que más recursos tienen dan respuestas rápidamente, sin dejar tiempo suficiente para que algunos de sus compañeros puedan pensar. El cálculo pensado no se identifica con la velocidad.⁶ Instalar un trabajo sobre el cálculo mental demanda concebir la organización de la clase tanto como el trabajo sobre otros asuntos matemáticos. Forma parte de la consigna plantear cómo, quiénes, cuándo pueden intervenir. Algunas veces trabajarán con la misma situación en forma individual, en pareja, en pequeños grupos, etc., y presentarán su trabajo designados por el docente, o al azar, o por elección dentro del grupo. Otras veces, los alumnos podrán trabajar en pequeños grupos ante distintas situaciones mientras el docente se dedica especialmente a aquellos que más lo necesitan. Es decir, en algunas ocasiones podrán gestarse espacios diferenciados que posibiliten la revisión de conocimientos (repertorios, procedimientos, reglas) de manera más sistemática para algunos grupos.

Cuando se busca que los alumnos exploren procedimientos de resolución, las anotaciones de lo que van realizando son esenciales. Lo son por varios motivos. Por un lado, constituyen un soporte para pensar la solución, tanto para recordar pasos y resultados intermedios, como para reflexionar sobre el procedimiento que se está siguiendo, en tanto la escritura "exterioriza" algunos aspectos de ese conocimiento, convirtiéndolo de ese modo en objeto de análisis. Por otro lado, dichas anotaciones constituyen medios de comunicación de los procedimientos, indispensables cuando se trata de explicitarlos ante la clase.

Si se asume que la fase colectiva es parte del trabajo de producción matemática, hay dos aspectos del rol docente que cobran relevancia. En primer lugar, cómo identificar qué cuestiones merecen discutirse y, en segundo, en qué situaciones puede resultar interesante que los alumnos confronten sus puntos de vista.

Es interesante tener en cuenta que, si las respuestas que los alumnos ofrecen provienen de ideas similares entre sí, posiblemente no aporte demasiado a la clase alentar que se comenten todas en el aula. Si las estrategias no comparten la misma idea, es importante sostener el debate precisando qué cuestiones se están discutiendo.

Señalamos —y queremos volver a resaltar— la necesidad de identificar los nuevos conocimientos que se van elaborando en el transcurso de actividades de cálculo mental y de las discusiones generadas a partir de ellas. Esto es, no basta con que se expliciten y validen los procedimientos y las reglas establecidas, sino que es necesario que algunos, los que tienen un alcance más general, sean reconocidos y nombrados por el docente y se desarrolle una práctica en torno a ellos que permita cierta automatización. Esto a veces puede resultar difícil: ¿qué poner en común acerca de procedimientos ajustados a situaciones particulares?, ¿cuáles son los aspectos generalizables de dichos procedimientos?, etcétera.

⁶ Eventualmente, la velocidad o la competencia puede ser incluida cuando favorece el propósito de la actividad. Por ejemplo, cuando se busca que los alumnos tomen conciencia de qué resultados tienen disponibles en la memoria.

EL USO DE LA CALCULADORA

La inclusión de la calculadora en el trabajo matemático de la escuela primaria resulta esencial por diversos motivos. Por un lado, como se ha convertido en una herramienta de cálculo muy extendida en la sociedad —llegando incluso a modificar los hábitos de cálculo—, sostenemos que la formación matemática de los

alumnos debe incluir el aprender a decidir cuándo utilizarla y, para ello, su uso, en términos generales, debe estar plenamente autorizado.

"(...) la vieja pregunta '¿Tienen que usar los alumnos calculadora en clase?' no tiene ya sentido, dado que las calculadoras existen, están ahí, en las manos de los alumnos, y es evidente que tienen una relación íntima con el mundo del cálculo aritmético y con las matemáticas en general. Una pregunta más interesante es, a nuestro juicio, la siguiente: '¿Cómo hay que usar la calculadora en clase de matemáticas para que se convierta en un poderoso auxiliar didáctico y para evitar los peligros de su utilización irreflexiva?'"⁷

Muchas veces, los docentes admiten el uso de la calculadora para que sus alumnos verifiquen cálculos resueltos de otro modo; otras veces, lo admiten para aliviar la tarea del cálculo. Estos son los usos más habituales cuando se autoriza este recurso. Sin embargo, habrá momentos en los que, dado el asunto específico que se esté trabajando, el maestro decidirá no habilitarla.

Queremos resaltar otro uso posible, menos extendido y, sin embargo, sumamente relevante. Muchas veces las situaciones planteadas requieren usos particulares de la calculadora, usos que no necesariamente están en función de obtener un resultado. Veamos dos ejemplos:

a) Imaginate que el visor de la calculadora muestra el 20,056. ¿Cómo se podría hacer para que, sin borrar el 20,056, el visor muestre 0, si sólo se pueden usar las teclas 1, 0, . y -?

b)

Si anoto este número en la calculadora...	y le sumo...	obtengo...
42		43,5
27,5		28,2
56		56,06

En estos ejemplos, la calculadora no se convierte en un instrumento para hallar el resultado, sino en un soporte a partir del cual proponer el problema. El trabajo del alumno requiere una anticipación que luego podrá constatar.

En síntesis, la calculadora también constituye un soporte sobre el cual proponer problemas y una dinámica de trabajo muy fructíferos desde el punto de vista de los conocimientos que pone en escena y de las posibilidades de verificación que ofrece. Por esa razón, el trabajo con calculadora no degrada ni reemplaza el tratamiento de los cálculos convencionales con lápiz y papel u otros cálculos mentales, sino que lo enriquece.

ACERCA DE ESTE DOCUMENTO

Este documento presenta actividades para la enseñanza del cálculo mental en relación con las fracciones y los números decimales. Encontrarán una parte dedicada a fracciones y otra a decimales. Dentro de cada una de ellas, las actividades se organizan según una progresión de dificultades.

⁷ Udina i Abelló, Frederic: "Aritmética y calculadoras", en *Matemáticas: cultura y aprendizaje*, Madrid, Síntesis, 1992.

Como ya se ha señalado, casi todas las actividades que aquí se incluyen proponen un trabajo con las fracciones y los números decimales en un contexto exclusivamente numérico. Se está suponiendo entonces que los alumnos ya han abordado estos contenidos en un trabajo —absolutamente necesario— con situaciones que apelen a otros contextos de referencia, como la medida o el reparto. Nos ocupamos aquí de un trabajo posterior dirigido a enriquecer un sentido de lo numérico, para lo cual también es necesaria una descontextualización de los conocimientos.

En ese sentido, esta propuesta para la enseñanza del cálculo mental con números racionales complementa el recorrido didáctico comunicado en la serie *Matemática. Fracciones y números decimales* para Segundo ciclo.⁸ Es decir, se trata de materiales pensados para ser utilizados conjuntamente, cada uno de ellos apoya y enriquece el trabajo que puede hacerse con el otro.

En relación con las fracciones y los números decimales, encontrarán en primer lugar tareas de comparación y orden, y no directamente de operaciones. Vale la pena aclarar los motivos por los cuales este tipo de actividades tiene aquí una presencia que no tiene en el material de *Cálculo mental con números naturales*. Estos nuevos objetos matemáticos, los números racionales, plantean un asunto que es difícil para los ojos de los alumnos que los están aprendiendo: un mismo número puede admitir múltiples representaciones. Una de las dificultades con las cuales deben enfrentarse al trabajar en este conjunto numérico es que existen diversas maneras para producir escrituras equivalentes. Las actividades de comparación y orden ponen esta cuestión en el centro del análisis: obligan a considerar la relación entre numerador y denominador; a poner en relación denominadores entre sí y numeradores entre sí; a referenciarlos a números naturales, etc. para dar cuenta de qué número se trata, si es mayor, menor o igual a otro dado. Esto es diferente de lo que sucedía al tratar con los números naturales.

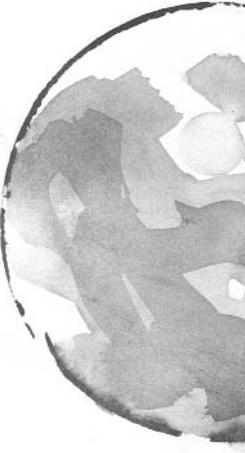
En este material, encontrarán actividades que involucran conocimientos que habrán sido objeto de elaboración en otros momentos del aprendizaje de los niños y que acá se retoman y se profundizan.

Será interesante que, a propósito de algunas de las actividades propuestas, el docente solicite a los alumnos que elaboren otras similares a las realizadas para plantear a sus compañeros (o a chicos de otro grado). Esta tarea permite revisar lo trabajado en dichas actividades desde un posicionamiento diferente, llevando a los niños a plantearse nuevas cuestiones acerca de las tareas realizadas: analizar qué se busca poner en práctica debiendo resolverlos y verificarlos, prever dificultades que puedan tener sus compañeros desarrollando aclaraciones al respecto, etcétera.

Frente a cada tarea hemos decidido mostrar el tipo de actividad al que se apunta, identificando el aspecto del contenido que se busca colocar en el centro del análisis para que el docente pueda, a partir de allí, decidir los ejemplos a proponer, recrearlos, agregar nuevos.

Para concluir, reiteramos la necesidad de abrir un lugar importante al cálculo mental, porque es un espacio de problemas privilegiado para alcanzar un conocimiento fundamentado de los números y de las operaciones.

⁸ G.C.B.A., Ministerio de Educación, Dirección General de Planeamiento Educativo, Dirección de Currícula y Enseñanza. *Fracciones y números decimales, 4º-7º grado. Segundo ciclo*.



Cálculo mental con fracciones

Comparación de fracciones

Actividad
1

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

1) Para cada una de las siguientes fracciones, decidí si son mayores o menores que 1. En cada caso, anotá también cuánto le falta o cuánto se pasa de 1.

$$\text{a)} \frac{1}{4} \quad \text{b)} \frac{3}{2} \quad \text{c)} \frac{3}{5} \quad \text{d)} \frac{3}{7} \quad \text{e)} \frac{14}{23} \quad \text{f)} \frac{23}{14}$$

Se busca que los alumnos puedan retomar y apoyarse en una idea básica: n veces $\frac{1}{n}$ es equivalente a 1. Se busca que consideren el entero expresado como una fracción conveniente que facilite el establecimiento de relaciones. Por ejemplo, $\frac{3}{3}$ equivale a 1; entonces, $\frac{4}{3}$ es igual a $1 + \frac{1}{3}$.

Como consecuencia del análisis de esta tarea, se podrá establecer –o recordar– la regla que establece que una fracción es mayor que 1 si el numerador es mayor que el denominador, y menor que 1 si el numerador es menor que el denominador. Será también interesante discutir con los niños que esta regla permite hallar la solución buscada cualquiera sea el numerador o denominador que se esté analizando.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

2) Completá las siguientes sumas y restas:

$$\text{a)} \frac{1}{2} + \dots = 1 \quad \text{c)} \frac{5}{6} + \dots = 1 \quad \text{e)} \frac{7}{4} + \dots = 1$$

$$\text{b)} \frac{3}{5} + \dots = 1 \quad \text{d)} \frac{2}{7} + \dots = 1 \quad \text{f)} \frac{9}{7} - \dots = 1$$

3) Completá el siguiente cuadro:

¿Cuánto le falta a...?	Para llegar a 1	Para llegar a 2	Para llegar a 3
$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{3}$			
$\frac{3}{4}$			
$\frac{2}{5}$			
$\frac{3}{8}$			

El propósito de la tarea 3 es extender a otros enteros las relaciones antes establecidas entre una fracción y la unidad. Así, por ejemplo, si a $\frac{1}{2}$ le falta $\frac{1}{2}$ para llegar a 1, habrá que agregarle a ese resultado $\frac{2}{2}$ más, es decir un entero, para llegar a 2 y otros $\frac{2}{2}$ más para llegar a 3.

Este trabajo permite sintetizar dos caras de un mismo aspecto que se ha estado tratando hasta el momento: la relación entre la fracción dada y el entero, y la posibilidad de pensar un entero expresado en términos de los denominadores de cada una de las fracciones dadas.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

4) Para cada una de las siguientes fracciones, anotá otras escrituras equivalentes:

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $1 \frac{1}{2}$ d) $\frac{11}{8}$ e) $5 + \frac{2}{3}$

5) ¿Cuáles de estas fracciones son equivalentes entre sí?

$\frac{4}{8}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{14}{8}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{7}{4}$ $2 + \frac{1}{2}$ $1 + \frac{6}{8}$

Para el trabajo con fracciones equivalentes, es probable que los niños apelen –si lo conocen– al algoritmo convencional basado en la multiplicación o la división del numerador y el denominador por un mismo número. La tarea es algo más compleja cuando los números están expresados como suma de un entero más una fracción: en ese caso, pueden optar por transformar sólo la parte fraccionaria o por expresar el número como una única fracción y luego obtener fracciones equivalentes.

A raíz de esta tarea, resultará interesante que se vuelva a analizar en la clase por qué funciona el algoritmo mencionado. Por ejemplo, como $\frac{1}{8}$ es una fracción tal que se necesitan 8 de esa cantidad para tener un entero, para tener $\frac{1}{2}$ hacen falta 4 de $\frac{1}{8}$, es decir $\frac{4}{8}$. Por tanto, $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{2}$ son equivalentes; o bien, $\frac{7}{4}$ y $\frac{14}{8}$ son equivalentes porque $\frac{1}{8}$ es la mitad de $\frac{1}{4}$, entonces $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{2}{8}$, así que $\frac{7}{4}$ equivale a $\frac{14}{8}$, etc.

Si bien movilizar estos razonamientos es más costoso que apelar solamente al mecanismo para obtener fracciones equivalentes, creemos que permiten enriquecer el conjunto de relaciones que los niños establecen entre las fracciones. Construir una red de relaciones los ayuda a "sostener" el tema de una manera más sólida.



COMPARACIÓN DE FRACCIONES

6) Completá las siguientes fracciones para que se cumplan las equivalencias, en cada caso:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\dots}{6}$ b) $\frac{3}{4} = \frac{21}{\dots}$ c) $\frac{5}{7} = \frac{25}{\dots}$ d) $\frac{3}{18} = \frac{\dots}{54}$

7) Discutan entre todos si las siguientes fracciones son equivalentes o no lo son:

$$\frac{8}{12} = \frac{12}{18}$$

Se propone un trabajo que complementa el recurso de multiplicar numerador y denominador por un mismo número y, por tanto, amplía la concepción de fracciones equivalentes. En efecto, tal como están escritas las fracciones, si sólo se conociera la regla utilizada hasta el momento, pareciera que no es posible establecer la equivalencia entre $\frac{8}{12}$ y $\frac{12}{18}$, porque no hay ningún número natural que, multiplicado por 12, dé 18 (ni un número que, multiplicado por 8, dé 12). Sin embargo, si se simplifica la fracción $\frac{8}{12}$, se establece que es equivalente a $\frac{2}{3}$, que, a su vez, es equivalente a $\frac{12}{18}$.

Aunque más compleja, otra posibilidad para establecer la equivalencia es analizar la relación entre numerador y denominador de cada fracción. Efectivamente, por ejemplo, $\frac{8}{12}$ es una fracción tal que el numerador "entra" una vez y media en el denominador; cualquier otra fracción que respete esta relación será una escritura equivalente del mismo número. Por tanto, como 12 también "entra" una vez y media en 18, resulta que $\frac{8}{12}$ es equivalente a $\frac{12}{18}$. No se espera que los niños produzcan solos esta relación, pero sí es interesante que el maestro la señale como un modo de ampliar el horizonte de relaciones en las que los niños se pueden apoyar. Como puede verse, un procedimiento "ilumina" aspectos y relaciones que no son "visibles" si se utiliza otro.

La misma tarea se puede plantear para otros pares de fracciones; por ejemplo:

$$\frac{6}{4} = \frac{15}{10}$$

$$\frac{12}{4} = \frac{45}{15}$$



COMPARACIÓN DE FRACCIONES

8) Analizá qué numeradores o denominadores podrían tener cada una de las siguientes fracciones para que sean menores que 1 y cuáles podrían tener para que sean mayores que 1. Anotá ejemplos en los casilleros correspondientes:

Fracción a completar	Fracciones menores de 1	Fracciones mayores de 1
$\frac{7}{\dots}$		
$\frac{5}{\dots}$		
$\frac{\dots}{3}$		
$\frac{\dots}{9}$		

Se espera reutilizar una regla que seguramente ya estuvo en juego en otras situaciones: si el denominador es menor que el numerador, la fracción será mayor que 1; si el denominador es mayor que el numerador, la fracción será menor que 1.

La situación "invita" a reflexionar en cada caso sobre la cantidad de soluciones posibles, apuntando a concluir que, cuando se trata de completar el denominador, para formar una fracción mayor que 1 hay tantas posibilidades como números (naturales) inferiores al del numerador, porque cuando el numerador es igual al denominador, se forma 1 entero. Por ejemplo, $\frac{7}{7}$ puede ser completado por 1, 2, 3, 4, 5 ó 6, para obtener una fracción mayor que 1.

Para formar una fracción menor que 1, el denominador puede ser cualquier número mayor que el numerador. Será interesante analizar con los niños que hay infinitas posibilidades. Los alumnos suelen confundir "infinito" con "todos" o con "cualquier número". Será esta una oportunidad para comenzar a diferenciar estos conceptos: aunque hay infinita cantidad de soluciones (cualquier número a partir del 8), no todos los números son solución (no lo son los que están entre 1 y 7).

Análogamente, se podrá analizar qué sucede cuando se trata de completar el numerador: hay infinitas soluciones para escribir fracciones mayores que 1 (pudiéndose realizar el mismo comentario que en el caso anterior) y una cantidad finita –tantas como números menores que el denominador hay– para escribir una fracción menor que 1. Por ejemplo para $\frac{\dots}{3}$, anotando números mayores que 3 en el numerador, se garantiza que la fracción sea mayor que $\frac{3}{3}$; para que sea menor que 1, es posible anotar solamente 1 ó 2.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

- 9) Los siguientes números se encuentran entre 0 y 3. Ubicalos en la columna que corresponda:

$$\frac{2}{5} - \frac{9}{4} - \frac{4}{3} - \frac{13}{5} - \frac{18}{7} - 1\frac{3}{7} - \frac{8}{3} - \frac{13}{6} - \frac{11}{7} - \frac{7}{5} - 2\frac{7}{9}$$

Entre 0 y 1	Entre 1 y 2	Entre 2 y 3

Un recurso posible para ubicar una fracción entre dos números naturales –esto es lo que requiere la tarea– es ir "pasando" por los números enteros usando fracciones con el mismo denominador que la fracción dada. Por ejemplo, para ubicar $\frac{13}{6}$: $\frac{6}{6}$ es 1, $\frac{12}{6}$ es 2 y $\frac{18}{6}$ es 3; por tanto, $\frac{13}{6}$ es mayor que 2 pero no llega a 3. Usado un recurso de este tipo, el docente podría analizar que finalmente se trata de ver cuántas veces "entra" 6 en 13. Esto es equivalente a establecer el cociente entero entre 13 y 6. El cociente entero de esa división (2) indica la cantidad de enteros que pueden formarse con $\frac{13}{6}$, y el resto (1) corresponde a la cantidad de sextos que "se pasan" de 2. Resulta entonces que dividir es también una estrategia posible para resolver el problema, pero probablemente esto recién sea visualizado por los alumnos a partir de un análisis realizado por el docente y no como estrategia inicial.

La tarea siguiente apunta a generalizar la posibilidad de ubicar una fracción entre dos enteros.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

10) ¿Entre qué números enteros se encuentra cada una de las siguientes fracciones?:

$$\dots \frac{8}{2} \dots \quad \dots \frac{7}{5} \dots \quad \dots \frac{11}{4} \dots \quad \dots \frac{27}{7} \dots \quad \dots \frac{36}{5} \dots$$

ACERCA DE LA COMPARACIÓN DE FRACCIONES

La tarea de comparar fracciones puede ser abordada a través de diferentes recursos. Disponer de un único algoritmo de comparación que englobe todos los casos posibles –reducir las fracciones a común denominador para luego compararlas– es indudablemente económico. Sin embargo, también hay un "beneficio" didáctico al movilizar diferentes estrategias, ya que se enriquecen las relaciones que los alumnos pueden establecer. Desde esta idea, explicitamos a continuación una serie de estrategias de comparación que no son generales pero que, a nuestro juicio, son útiles para ampliar la perspectiva de los alumnos. Se trata de que el docente las vaya tratando en las clases, con la intención de comunicar a los alumnos que, para algunos casos particulares, existen recursos alternativos que resultan más económicos que el caso general. Aspiramos a que los niños vayan construyendo una posición activa frente a las tareas que se les proponen, posición que incluye decidir en cada caso cuál es el recurso que resulta para ellos más adecuado, sin necesidad de que dependan de una única posibilidad. No se espera que mecanicen estos recursos: lograr que usen lo más conveniente en cada caso es un objetivo a largo plazo que conseguirán si en el aula, y a propósito de las diferentes actividades que se realizan, está presente el análisis de la diversidad de posibilidades y de la economía que estas procuran.

- a) A veces, es útil comparar con 1. Por ejemplo, si se tratara de comparar $\frac{1}{3}$ y $\frac{7}{5}$ es más fácil analizar que $\frac{1}{3}$ es menor que 1 y $\frac{7}{5}$ es mayor, que "pasar" a denominador 35 ambas fracciones. El docente podría proponer una serie de pares de fracciones en los que una sea mayor que 1 y la otra menor, con la intención de identificar esta estrategia y también establecer los límites de su alcance.
- b) También es "fácil" comparar fracciones cuando tienen el mismo numerador: $\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{1}{4}$ porque para formar un entero con partes de $\frac{1}{5}$ "se necesitan" 5 partes y, para formarlo con partes de $\frac{1}{4}$, se necesitan 4. Por tanto, las partes de $\frac{1}{5}$ son "más chicas" y, como en ambos casos se ha tomado una, entonces $\frac{1}{5}$ es menor que $\frac{1}{4}$.
- c) Cuando se comparan dos fracciones en las que en ambas el numerador es uno menos que el denominador, resulta posible considerar cuánto le falta a cada fracción para completar el entero. Por ejemplo, para $\frac{8}{9}$ y $\frac{3}{4}$ puede pensarse que a $\frac{8}{9}$ le falta $\frac{1}{9}$ para el entero y a $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{1}{4}$. Como a $\frac{8}{9}$ le falta menos (porque $\frac{1}{9}$ es menor que $\frac{1}{4}$), $\frac{8}{9}$ es mayor.

Fracciones: sumas y restas

Las tareas de cálculo mental con sumas y restas que se proponen en esta actividad requieren la movilización de diferentes recursos: pensar los números naturales como fracciones; inversamente, considerar una fracción mayor que 1 como suma de un número natural y una fracción menor que 1; concebir una fracción en términos de distancia a un cierto entero; analizar un cálculo y obtener información sobre el resultado sin realizarlo de manera efectiva.

La primera tarea consiste en sumar o restar 1 a una fracción. Una estrategia conveniente es pensar el 1 como una fracción cuyo denominador es igual al de la fracción dada. Se proponen sólo algunos ejemplos, el docente podrá seleccionar cuáles realizar; si lo considerara necesario, podrá agregar otros del mismo tipo. Será interesante explicitar, luego de haber resuelto algunos ejercicios, una estrategia que permita abordarlos rápidamente. Dicha estrategia podrá extenderse luego para sumar una fracción más un número entero mayor que 1.



FRACCIONES: SUMAS Y RESTAS

1) Calculá mentalmente. No se puede escribir la respuesta como número mixto.

a) $\frac{1}{4} + 1 =$	d) $\frac{9}{7} - 1 =$	g) $\frac{8}{7} + 3 =$
b) $\frac{3}{8} + 1 =$	e) $\frac{15}{4} - 1 =$	h) $\frac{9}{2} - 4 =$
c) $\frac{19}{3} + 1 =$	f) $\frac{3}{5} + 2 =$	i) $\frac{8}{3} - 2 =$

2) Calculá mentalmente qué número debe colocarse en cada caso para completar los siguientes cálculos:

a) $\frac{1}{5} + \dots = 2$	d) $\frac{7}{6} + \dots = 3$
b) $\frac{1}{2} + \dots = 2$	e) $\frac{5}{2} - \dots = 1$
c) $\frac{3}{5} + \dots = 2$	f) $\frac{17}{5} - \dots = 3$

La tarea anterior exige pensar cuánto le falta a cada una de las fracciones dadas para obtener el número natural que se da a la derecha del signo " $=$ ". Un recurso posible es que los alumnos completen cuánto "falta" para el entero más próximo y luego agreguen lo que falta para el entero que se solicita. Por ejemplo, para obtener 1 a partir de $\frac{1}{5}$ hay que sumar $\frac{4}{5}$, y luego $\frac{5}{5}$ más para obtener 2; en total, hay que sumar $\frac{9}{5}$ a $\frac{1}{5}$ para obtener 2. Este trabajo está "empareñado" con el que se propuso en la actividad anterior de ubicar una fracción entre dos enteros: acá también es necesario pensar la fracción dada como un entero "más algo". Será interesante hacer explícita la relación entre las dos tareas, relación que no necesariamente los alumnos identificarán espontáneamente. "Mirar las cosas" de distintas maneras ayuda a adquirir flexibilidad. También será interesante pensar estos cálculos en términos de distancia de las fracciones dadas a los respectivos números naturales propuestos.



FRACCIONES: SUMAS Y RESTAS

3) Decidí, sin calcular el resultado, si es cierto que:

- a) $\frac{1}{2} + 1$ es mayor que 1
b) $5 + 1 \frac{3}{4}$ es mayor que 7
c) $5 - \frac{5}{4}$ es menor que 4

- d) $9 - \frac{1}{4}$ es menor que 8
e) $6 + \frac{18}{9}$ es mayor que 10
f) $10 + \frac{14}{7}$ es igual a 12

La tarea anterior apunta a que los niños puedan, sin realizar el cálculo efectivo, analizar y establecer si son o no verdaderas las afirmaciones propuestas. Por ejemplo, para establecer que $9 - \frac{1}{4}$ no es menor que 8, deberán darse cuenta de que, para "llegar a 8" a partir de 9, hay que restar $\frac{4}{4}$. Para realizar este trabajo resultarán de gran apoyo las relaciones establecidas a partir de las tareas 1 y 2, y las realizadas en la actividad anterior.



FRACCIONES: SUMAS Y RESTAS

4) Anotá cada una de las siguientes fracciones como sumas de un número entero más una fracción menor que 1:

a) $\frac{4}{3}$
b) $\frac{9}{4}$
c) $\frac{11}{6}$

d) $\frac{19}{3}$
e) $\frac{25}{9}$
f) $\frac{31}{4}$

La tarea 5 que se propone a continuación apunta a que los alumnos construyan un repertorio aditivo con algunas fracciones.

Recurrir a usar fracciones equivalentes en casos "fáciles" –por ejemplo cuando uno de los denominadores es múltiplo del otro– es una estrategia que se espera movilizar y acerca de la cual se puede reflexionar.



FRACCIONES: SUMAS Y RESTAS

5) Calculá mentalmente:

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$
b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$
c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} =$

d) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$
e) $\frac{3}{10} - \frac{1}{5} =$
f) $\frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$

g) $\frac{1}{16} + \frac{3}{8} =$
h) $\frac{1}{8} - \frac{1}{16} =$
i) $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} =$

En toda esta secuencia se espera que los niños puedan buscar qué tareas de las que ya resolvieron ayudan a resolver una nueva y más compleja. Este es un tipo de actitud que no surge espontáneamente entre los alumnos, y que será interesante que el docente pueda promover.

Multiplicación y división de una fracción por un número natural

Las tareas que se proponen a continuación exigen poner en juego el concepto básico de fracción. El objetivo es que los alumnos vayan elaborando relaciones parciales que permitan enfrentar de manera más sólida el trabajo futuro con multiplicación de fracciones. En cada una de las tareas que componen esta actividad se proponen varios ejemplos; el docente podrá seleccionar algunos de ellos y/o agregar otros del mismo tipo si lo considera necesario.

Primera parte: se propone que los alumnos calculen mentalmente el resultado de multiplicaciones del tipo $\frac{1}{n} \times n$, recuperando la definición de fracción. Efectivamente, a esta altura los alumnos ya han estudiado que $\frac{1}{n}$ es una fracción tal que n veces $\frac{1}{n}$ es 1. Está claro que lo hicieron a raíz de diferentes fracciones y no necesariamente en forma genérica. Se trata ahora de expresar esa misma idea como una multiplicación: si $\frac{1}{4}$ es una fracción tal que 4 veces $\frac{1}{4}$ es 1, entonces $4 \times \frac{1}{4} = 1$. Será interesante generalizar estos resultados: $\frac{1}{n} \times n = 1$.

Segunda parte: ¿Por cuánto hay que multiplicar un número natural para obtener 1 como resultado? ¿Por cuánto hay que multiplicar una fracción del tipo $\frac{1}{n}$ para obtener 1? Se trata de mirar la misma relación anterior desde otro costado.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

1) Calculá mentalmente el resultado de las multiplicaciones.

a) $\frac{1}{4} \times 4 =$	d) $\frac{1}{13} \times 13 =$
b) $\frac{4}{3} \times 3 =$	e) $\frac{1}{25} \times 25 =$
c) $\frac{1}{9} \times 9 =$	

2) Multiplicá una fracción del tipo $\frac{1}{n}$ por un número tal que permita obtener como resultado un número entero.

a) $5 \times \dots = 1$	c) $4 \times \dots = 1$	e) $\frac{1}{11} \times \dots = 1$
b) $3 \times \dots = 1$	d) $\frac{1}{5} \times \dots = 1$	f) $\frac{1}{21} \times \dots = 1$

3) Calculá mentalmente por cuánto hay que multiplicar a cada una de las siguientes fracciones para obtener el resultado indicado.

a) $\frac{1}{7} \times \dots = 3$	d) $\frac{1}{8} \times \dots = 2$
b) $\frac{1}{5} \times \dots = 2$	e) $\frac{1}{5} \times \dots = 4$
c) $\frac{1}{3} \times \dots = 5$	

Esta última tarea retoma y profundiza la anterior. La idea que se busca trabajar es que, para "llegar" multiplicativamente desde una fracción del tipo $\frac{1}{n}$ a un número, se puede "conseguir" primero llegar a 1 y luego obtener el número buscado. Por ejemplo, si hay que buscar por cuánto hay que multiplicar a $\frac{1}{5}$ para obte-

ner 2, se puede hacer primero $\frac{1}{5} \times 5$ que da 1, y luego multiplicar por 2. Componiendo las dos multiplicaciones resulta que $\frac{1}{5} \times 5 \times 2$ (que es igual a $\frac{1}{5} \times 10$), da como resultado 2. Es importante resaltar que "multiplicar y luego volver a multiplicar" es equivalente a "multiplicar por el producto". Es un error habitual en los alumnos sumar los factores en lugar de multiplicarlos; por eso será importante someter a discusión las distintas estrategias que surjan en la clase.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

- 4) Calculá mentalmente por cuánto hay que multiplicar a cada uno de los siguientes números para obtener el resultado indicado:

Primera parte:

a) $4 \times \dots = 1$ b) $3 \times \dots = 1$ c) $9 \times \dots = 1$ d) $5 \times \dots = 1$

Segunda parte:

a) $4 \times \dots = 2$ b) $3 \times \dots = 3$ c) $9 \times \dots = 4$ d) $5 \times \dots = 4$

Se trata de que los alumnos elaboren una estrategia para "pasar" multiplicando de un número natural a otro número natural. Acá también se sugiere la utilización del 1 como intermediario para dicho pasaje. La primera parte retoma la tarea 1 para luego extenderla. Como siempre, el docente puede inventar otros ejemplos del mismo tipo o seleccionar solo algunos de los que se proponen, en función de su propio proyecto.

Para realizar la segunda parte, los alumnos deberán comprender que, por ejemplo, si $4 \times \frac{1}{4} = 1$ y se quiere obtener como resultado 2 (el doble de 1) manteniendo uno de los factores (4), deberá duplicarse el otro factor: $4 \times \frac{2}{4} = 2$. Otra manera de pensar por cuánto hay que multiplicar 4 para obtener 2 es pensar por cuánto multiplicarlo para obtener 1 y luego multiplicar por el resultado buscado: $4 \times \frac{1}{4} \times 2 = 4 \times \frac{2}{4}$.

La secuencia de las cuatro tareas anteriores apunta a tratar una idea que es difícil para los niños: en el conjunto de los números racionales, siempre se puede pasar multiplicativamente de un número a otro. Por ahora, ese "pasaje" se propone considerando números naturales para los números de "partida" y de "llegada", aunque, obviamente, el factor debe ser una fracción. Esto puede resultar extraño a los alumnos porque "rompe" con ideas elaboradas a propósito de los naturales, pero que ya no son válidas al incluir los racionales: por ejemplo, no hay ningún número natural que multiplicado por 9 dé 4; en cambio, $9 \times \frac{4}{9} = 4$. Por eso, en un primer momento, los niños suelen responder "no hay ningún número, no tiene solución".

Como mostramos, es importante que los alumnos comprendan la conveniencia de usar 1 como intermediario.



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

5) Calculá el doble de:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{7}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{8}{5}$

e) $\frac{6}{5}$

f) $\frac{1}{8}$

g) $\frac{9}{4}$

h) $\frac{7}{11}$

Se trata de que los niños encuentren cierta regularidad que les permita elaborar la estrategia de duplicar los numeradores. Muchas veces los chicos suelen escribir que el doble de $\frac{1}{3}$ es $\frac{2}{6}$, sin notar que están proponiendo una fracción equivalente a la dada. Si no apareciera en la clase, sería interesante que el docente comentara esta respuesta para someterla a análisis.

Es posible que este problema no genere dificultades, ya que puede tratarse "aditivamente".



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

6) Calculá la mitad de:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{1}{3}$

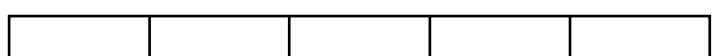
e) $\frac{1}{6}$

f) $\frac{1}{9}$

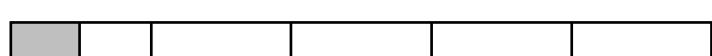
Se espera que los alumnos determinen que, para calcular la mitad de una fracción con numerador 1 (aunque la regla es general se propone tratarla primero para este caso), hay que duplicar denominador. Para pensar esto, tal vez los alumnos necesiten volver a usar como referencia alguna situación concreta de reparto: "Si parto un chocolate en cinco partes iguales, cada parte es $\frac{1}{5}$; si cada una de estas partes se parte por la mitad, quedan 10 partecitas que forman todo el chocolate".

Descontextualizando un poco la referencia:

$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$



$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$



Descontextualizando un poco más aún: si $5 \times \frac{1}{5}$ es 1, al considerar la mitad de $\frac{1}{5}$ (que es uno de los factores), para obtener el mismo resultado, el otro factor, que es 5, debe duplicarse. Resulta entonces que 10 veces la mitad de $\frac{1}{5}$ es 1, lo cual indica que la mitad de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{10}$.

 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

7) Calculá la mitad de:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{7}{2}$

e) $\frac{4}{9}$

f) $\frac{9}{4}$

Se apunta aquí a que los niños puedan generalizar la estrategia de duplicar el denominador y dejar fijo el numerador. La tarea es más difícil que la anterior, porque los numeradores no son 1. Para calcular la mitad de $\frac{1}{4}$ se esperan razonamientos de este tipo: "como la mitad de $\frac{1}{4}$ es $\frac{1}{8}$, la mitad de $\frac{3}{4}$ es $\frac{3}{8}$ ". Ahora bien, en los casos en los que el numerador es par, también se resuelve la tarea haciendo la mitad de dicho numerador: la mitad de $\frac{4}{9}$ es $\frac{2}{9}$, porque $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. Habrá que comparar entonces $\frac{2}{9}$ (obtenido mediante la estrategia de hacer la mitad del numerador) con $\frac{4}{18}$ (obtenido mediante la estrategia de duplicar el denominador).

A raíz de estas tareas, será interesante analizar con los alumnos que:

- dada una fracción, si se hace la mitad del numerador y la mitad del denominador, se obtiene una fracción equivalente a la dada y no su mitad;
- 3 es la mitad de 6, pero $\frac{1}{3}$ no es la mitad de $\frac{1}{6}$; etcétera.

Si el docente lo considera conveniente, podrá extender estas tareas para el cálculo del triple y la tercera parte.

A continuación se propone una fracción y tres alternativas para establecer el doble o la mitad. Las opciones propuestas en cada caso recogen los errores más frecuentes que los niños suelen cometer en relación con las fracciones cuando extienden a este dominio numérico ideas construidas a propósito de los números naturales. Por ejemplo, pensar que, para calcular el doble de una fracción, es necesario operar simultáneamente sobre el numerador y el denominador.



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

8) Para cada fila de la siguiente tabla, señala cuál es la respuesta correcta y explicá cómo lo pensaste:

El doble de $\frac{4}{5}$ es:	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{4}{10}$
La mitad de $\frac{4}{10}$ es:	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{5}$

La argumentación necesaria para aceptar las respuestas correctas y rechazar las que no lo son constituye un espacio de producción de relaciones mucho más rico que la simple actividad de optar y verificar la respuesta. Aun cuando los alumnos hayan respondido correctamente, es productivo que el docente promueva la explicitación de las razones por las cuales no son válidas las opciones incorrectas. De allí que resulte muy valiosa la discusión posterior a la elección que cada alumno pueda realizar.



MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN POR UN NÚMERO NATURAL

9) Calculá mentalmente:

a) $\frac{1}{2} : 2 =$

d) $\frac{1}{5} : 2 =$

b) $\frac{1}{2} : 3 =$

e) $\frac{1}{5} : 3 =$

c) $\frac{1}{2} : 4 =$

f) $\frac{1}{5} : 4 =$

La idea que se juega en esta última tarea es que si $\frac{1}{n}$ (en términos para los docentes) se divide por ejemplo en tres partes, se triplica la cantidad de partes necesarias para reconstruir el 1, lo cual justifica que se triplique el denominador. Esta idea está presente en muchas de las tareas propuestas.

Actividad

4

Fracción de una colección de objetos

Aunque los niños estén familiarizados con la noción de fracción en un contexto continuo, "pasar" a calcular la fracción de una colección suele presentar dificultades. Las mismas pueden explicarse cuando se toma conciencia de que la tarea implica reconocer al mismo tiempo dos unidades de medida: el objeto de la colección y la colección completa. Así, por ejemplo, para calcular $\frac{1}{3}$ de 15 alfajores hay que pensar en la unidad "alfajor" y en la unidad "colección de los 15 alfajores".

En la siguiente tarea se plantean enunciados en los que hay que calcular fracciones "fáciles" de una colección: mitad, cuarta parte, tercera parte, etc.

La primera parte apunta a recordar el tema; en la segunda, se propone el cálculo de diferentes fracciones de la misma colección. La intención de esta segunda parte es establecer con los alumnos algunas relaciones ya tratadas: por ejemplo, $\frac{1}{6}$ de 18 alfajores se puede calcular dividiendo 18 por 6, pero también se puede pensar que $\frac{1}{6}$ de 18 alfajores es la mitad de $\frac{1}{3}$ de 18 alfajores, ya que $\frac{1}{6}$ es la mitad de $\frac{1}{3}$. De esta manera, una de las relaciones actúa como control de la otra. Es importante resaltar que esto tiene sentido cuando se trabaja sobre la misma colección.

FRACCIÓN DE UNA COLECCIÓN DE OBJETOS

1) Primera parte: ¿Cuánto es...

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) ... la mitad de 12 alfajores? | c) ... la mitad de 16 caramelos? |
| b) ... la cuarta parte de 20 alfajores? | d) ... la cuarta parte de 2 tortas? |

Segunda parte: Calculá:

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) la mitad de 18 alfajores. | c) la tercera parte de 18 alfajores. |
| b) la sexta parte de 18 alfajores. | d) la novena parte de 18 alfajores. |

Se trata ahora de extender las relaciones anteriores a cálculos con fracciones de numerador mayor que 1, apuntando a que los alumnos se basen en que, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ es el doble de $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$ es cuatro veces $\frac{1}{3}$, etc. De esta manera, si $\frac{1}{3}$ de 9 caramelos son 3 caramelos, $\frac{2}{3}$ de 9 caramelos son 6 (el doble).

FRACCIÓN DE UNA COLECCIÓN DE OBJETOS

2) Calculá mentalmente:

Si se tienen...	¿Cuántos caramelos son $\frac{1}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{2}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{3}{3}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{4}{3}$ de la colección?
9 caramelos				
24 caramelos				
36 caramelos				

Si se tienen...	¿Cuántos caramelos son $\frac{1}{4}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{2}{4}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{3}{4}$ de la colección?	¿Cuántos caramelos son $\frac{7}{4}$ de la colección?
8 caramelos				
12 caramelos				
36 caramelos				

Fracciones decimales

Se propone un trabajo que "ponga a punto" las relaciones entre fracciones decimales y la unidad ($10 \times \frac{1}{10} = 1$; $100 \times \frac{1}{100} = 1$) y entre distintas fracciones decimales ($10 \times \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$; $10 \times \frac{1}{1.000} = \frac{1}{100}$). Disponer de estas relaciones "beneficiaría" el trabajo con expresiones decimales, a la vez que es una oportunidad para seguir "visitando" ideas básicas relativas al concepto de fracción.

En este sentido, será interesante que los alumnos analicen cuestiones como las siguientes:

FRACCIONES DECIMALES

- 1) a) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{10}$ para que el resultado sea 1?
- b) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{100}$ para que el resultado sea 1?
- c) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{1.000}$ para que el resultado sea 1?
- d) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{10}$ para que el resultado sea 2? ¿Y para que el resultado sea 5?
- e) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{100}$ para que el resultado sea 2?

Las preguntas anteriores se pueden formular apelando a la multiplicación. Por ejemplo, "¿por cuánto hay que multiplicar $\frac{1}{10}$ para que el resultado sea 1?".

El docente puede generar preguntas de este tipo "a voluntad", es decir, pedir a los alumnos que compongan un número entero con décimos o centésimos.

FRACCIONES DECIMALES

- 2) a) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{100}$ para que el resultado sea $\frac{1}{10}$?
- b) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{1.000}$ para que el resultado sea $\frac{1}{100}$?
- c) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{1.000}$ para que el resultado sea $\frac{1}{10}$?
- d) ¿Qué parte del décimo es un centésimo? ¿Y un milésimo?

Una vez que haya cierta familiaridad con las relaciones entre fracciones decimales con numerador 1, se pueden proponer otras relaciones. Por ejemplo:

- e) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{100}$ para obtener $\frac{3}{10}$?
- f) ¿Cuántas veces hay que sumar $\frac{1}{1.000}$ para obtener $\frac{2}{100}$?

Como resultado de cálculos como los anteriores se espera establecer las relaciones de valor entre décimos y 1, entre milésimos, centésimos y décimos, etc:

$$\begin{aligned}10 \times \frac{1}{10} &= 1 \\10 \times \frac{1}{100} &= \frac{1}{10} \\10 \times \frac{1}{1.000} &= \frac{1}{100} \\10 \times \frac{1}{100} &= \frac{1}{10} \\10 \times \frac{1}{1.000} &= \end{aligned}$$

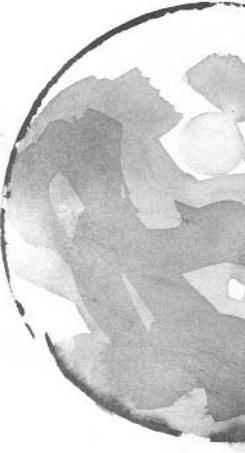
Se propone la tarea de ubicar una fracción decimal entre dos números naturales. Se trata de identificar un modo rápido de hacerlo a partir de la facilidad en los cálculos que permiten los denominadores que son potencias de 10. Por ejemplo, se puede pensar que $\frac{19}{10}$ es $\frac{10}{10} + \frac{9}{10}$ y establecer, en consecuencia, que $\frac{19}{10}$ está entre 1 y 2.

FRACCIONES DECIMALES

3) ¿Entre qué números naturales consecutivos se ubican las siguientes fracciones?

- a) ... $\frac{19}{10}$...
- b) ... $\frac{145}{100}$...
- c) ... $\frac{2}{10}$...
- d) ... $\frac{473}{100}$...
- e) ... $\frac{300}{100}$...

Ubicadas las fracciones entre dos números naturales consecutivos, se puede preguntar de cuál de los dos números naturales está más cerca.



Cálculo mental con números decimales

Números decimales y fracciones decimales

Actividad
1

Como venimos planteando, las situaciones de cálculo mental son un modo de profundizar las relaciones numéricas que los alumnos van elaborando, al tiempo que constituyen una manera de revisar y mantener "actualizado" el tema. En este sentido, las tareas que se proponen a continuación han sido formuladas bajo el supuesto de que los alumnos ya han trabajado con escrituras decimales y conocen -pero se pudieron haber olvidado- las relaciones que hay que poner en juego para resolverlas. Para poder controlar su trabajo, básicamente los alumnos deberían disponer de las siguientes relaciones:

- la primera posición después de la coma corresponde a los décimos, la segunda a los centésimos, etc;
- las escrituras $0,1$ y $\frac{1}{10}$ son dos modos diferentes de anotar el mismo número; del mismo modo, las escrituras $0,01 = \frac{1}{100}$; $0,001 = \frac{1}{1.000}$, etc.
- $10 \times 0,1 = 1$; $10 \times 0,01 = 0,1$; $10 \times 0,001 = 0,01$; etc.
- $0,1$ es la décima parte de 1 ; $0,01$ es la décima parte de $0,1$; etc.
- $1 : 10 = 0,1$; $0,1 : 10 = 0,01$; etc.

Un modo de "hablar" sobre las relaciones anteriores puede consistir en plantear algunas preguntas que den lugar a reflexiones sobre la notación decimal.



NÚMEROS DECIMALES Y FRACCIONES DECIMALES

- 1) ¿Cuántas veces hay que sumar $0,1$ para obtener 1 ? ¿Cuál es el resultado de multiplicar $0,1 \times 10$?

Luego de que los alumnos obtengan que $0,1 \times 10$ es 1, se podrá recordar que ese resultado indica que 0,1 es $\frac{1}{10}$ de 1. Tal vez sea "clave" analizar cuánto es $0,9 + 0,1$. Algunos alumnos insisten en suponer que $0,9 + 0,1$ es 0,10 dando cuenta con esta respuesta que se "olvidan" del 0, y se manejan como si estuvieran trabajando con números naturales. La referencia a los dígitos puede constituir un buen punto de apoyo para ayudar a revisar ese error: 9 dígitos más 1 dígito es igual a 10 dígitos, que es 1. Proponemos a continuación una serie de preguntas que apuntan a revisar y explicitar relaciones entre posiciones contiguas y no contiguas en la notación decimal. El docente seleccionará cuáles le resultan interesantes en función de los conocimientos de sus alumnos. Cualquiera sea la selección que se realice, nos interesa resaltar que los argumentos que los niños proponen para fundamentar sus respuestas suelen ser una fuente muy rica de producción de relaciones, de comprensión y de profundización del trabajo:

- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para obtener 1?
 - ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para obtener 0,1?
 - ¿Cuánto es $0,01 \times 10$? ¿Y $0,01 \times 100$? etcétera.
-
- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,1 para obtener 3 como resultado?
 - ¿Cuántas veces hay que sumar 0,1 para obtener 1,2 como resultado? ¿Y para obtener 2,3 como resultado? ¿Y para obtener 12,2?
-
- ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para obtener 3 como resultado? ¿Y para obtener 0,2 como resultado? ¿Y para obtener 0,08 como resultado?
 - ¿Cuántas veces hay que sumar 0,01 para obtener 3,28 como resultado?

A partir de una pregunta como la anterior, puede analizarse con los alumnos que:

$$3,28 = 3 + 0,2 + 0,08 = 300 \times 0,01 + 20 \times 0,01 + 8 \times 0,01 = 328 \times 0,01$$



NÚMEROS DECIMALES Y FRACCIONES DECIMALES

2) Escribí los siguientes números como una descomposición de número entero y fracciones decimales:

- a) 3,5 =
- b) 6,24 =
- c) 5,03 =
- d) 4,363 =
- e) 5,001 =

Dado que diferentes descomposiciones son posibles para cada uno de los números, la puesta en común será una ocasión para analizar su validez a partir de la explicitación de equivalencias.

Por ejemplo: $6,24$ puede ser $6 + \frac{24}{100}$ ó $6 + \frac{2}{10} + \frac{4}{100}$.

Es interesante detenerse en la importancia del cero, confrontando su papel en la escritura decimal con lo que sucede en la escritura fraccionaria. Mientras en esta última no aparece ninguna notación para indicar que no hay unidades de un orden dado (por ejemplo, $5,03 = 5 + \frac{3}{100}$, no requiere de ninguna marca que señale en la escritura fraccionaria la ausencia de décimos); en los números decimales es necesario indicarlo con un cero.

Los análisis de esta actividad servirán de base a los cálculos sencillos que se plantean en la actividad siguiente.

Como conclusión de la actividad, se puede pedir a los alumnos que escriban las relaciones en las que se apoyan para hacer los cálculos. Estas anotaciones podrán retomarse cuando sea necesario.

Relaciones de orden en los números decimales

Actividad
2

Con frecuencia, al comparar expresiones decimales, muchos alumnos cometen errores como resultado de intentar extender a los números decimales algunas ideas que han elaborado a propósito de los números naturales. Un ejemplo típico -seguramente el lector lo reconocerá inmediatamente- se da cuando los alumnos dicen que "3,6 es menor que 3,28 porque 6 es menor que 28". Pareciera que los niños que producen argumentos como éstos pensaran los decimales como dos números naturales separados por una coma, y que esto les permitirá tratar la parte entera y la parte decimal de manera independiente.

Notemos también que los niños han aprendido que, entre dos números naturales, es mayor el que se escribe con más cifras, y esta propiedad del sistema de notación para números naturales deja de ser válida cuando se trabaja con los números decimales.

El intento obstinado de los alumnos por aplicar a los decimales aquello aprendido para los naturales hace necesario proponer situaciones que les permitan poner en juego lo que saben sobre los naturales, analizar la validez de esas relaciones en el campo de los decimales, relativizarlas, definir los límites de su funcionamiento, descubrir relaciones propias de estos nuevos números.

El trabajo en este y otros problemas sobre orden en los números decimales apuntará a que los alumnos produzcan argumentos que expliciten las relaciones consideradas en sus decisiones. Como parte de la construcción de justificaciones válidas, se busca también rechazar algunas relaciones erróneas basadas en modos de pensar los decimales "calcados" sobre los conocimientos construidos para los números naturales.



RELACIONES DE ORDEN EN LOS NÚMEROS DECIMALES

1) Completá con < , > ó =:

a) $\frac{2}{10}$... 0,6

b) 2 ... $\frac{15}{10}$

c) $\frac{3}{10}$... 0,007

d) $\frac{34}{10}$... 3

e) $\frac{8}{100}$... 0,056

2) Completá con < , > ó =:

a) $3 + \frac{5}{10}$... 3,2

b) $6 + \frac{8}{100}$... 6,1

c) $7 + \frac{43}{100}$... 7,6

d) $5 + \frac{27}{100}$... 5,4

e) $12 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100}$... 12,099

Las tareas 1 y 2, que solicitan comparar una escritura fraccionaria con una escritura decimal, vuelven a traer a escena, ahora para comparar números, las relaciones entre ambas notaciones: la primera cifra después de la coma representa la cantidad de décimos; la segunda, la cantidad de centésimos, etc. Desde esa idea, se puede establecer, por ejemplo, que 3,2 es igual a $3 + \frac{2}{10}$ y que, por consiguiente, 3,2 es menor que $3 + \frac{5}{10}$. La misma relación puede pensarse transformando en escritura decimal $3 + \frac{5}{10}$.

En la próxima tarea se proponen algunas posibles comparaciones que apuntan a poner de relieve ciertas reglas:

- Si dos números decimales tienen diferente parte entera, es mayor el que tiene mayor parte entera.
- Si las partes enteras son iguales, es mayor aquel que tiene mayor la cifra de los décimos, y esto independientemente de cómo "continúa" cada número.
Si los décimos fueran iguales, se compararán los centésimos, etcétera.

Los números que se proponen apuntan a reflexionar sobre aspectos acerca de los cuales los alumnos suelen dudar. Se plantean sólo algunos ejemplos y el docente podrá incluir otros similares si lo considera necesario.

3) Completá con <, > ó =:

a) $2,75 \dots 4,3$

b) $3,4 \dots 3,6$

c) $3,429 \dots 3,43$

d) $6,7 \dots 6,60$

e) $9,340 \dots 9,34$

En el caso del punto a), los alumnos podrían dudar por el hecho de que 2,75 tiene tres cifras y 4,3 tiene dos.

El caso del punto b) es un ejemplo no problemático, ya que "calza" bien en los razonamientos que suelen hacer los niños: $4 < 6$ y $3,4 < 3,6$. La intención es hacer funcionar algunas reglas y también establecer sus límites. Se trata de que los alumnos empiecen a comprender que es necesario comparar "cifra por cifra". Será interesante poner en relación la comparación anterior con, por ejemplo, la comparación entre 3,45 con 3,6. Acá se podría considerar que $\frac{4}{10} + \frac{5}{100}$ es menor que $\frac{5}{10}$ y, por tanto, menor que $\frac{6}{10}$. Seguramente "vendrá bien" recordar que $\frac{1}{100}$ es $\frac{1}{10}$ de $\frac{1}{10}$ y que, en consecuencia, 10 veces $\frac{1}{100}$ es $\frac{1}{10}$.

Seguramente en el ejemplo c) muchos alumnos dudarán. Un camino posible es comparar $\frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1.000}$ con $\frac{4}{10} + \frac{3}{100}$. ¿Cómo establecer que $\frac{2}{100} + \frac{9}{1.000}$ es menor que $\frac{3}{100}$? Habrá que coordinar varias relaciones:

$$\begin{aligned}\frac{3}{100} &= \frac{2}{100} + \frac{1}{100} \\ \frac{10}{1.000} &\text{ es } \frac{1}{100} \\ \frac{9}{1.000} &< \frac{10}{1.000} ; \text{ por tanto} \\ \frac{9}{1.000} &< \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} + \frac{9}{1.000} &< \frac{2}{100} + \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} + \frac{9}{1.000} &< \frac{3}{100}\end{aligned}$$

Es probable que este conjunto de relaciones resulte arduo para los alumnos, pero es nuestra intención señalar la complejidad inherente a algunas comparaciones, complejidad que muchas veces queda oculta en reglas que los niños no terminan de entender.

En el punto d) será importante analizar por qué $6,60 = 6,6$, apoyándose en la descomposición decimal:

$$6 + \frac{6}{10} + \frac{0}{100} = 6 + \frac{6}{100}.$$

El ejemplo e) es similar al anterior, pero con tres cifras.



RELACIONES DE ORDEN EN LOS NÚMEROS DECIMALES

4) Ordená los siguientes números de menor a mayor:

2,639 2,8 2,64 2,7 2,799

5) Completá el espacio en blanco con una cifra, de modo que los números queden ordenados de menor a mayor:

0,...5 0,1...8 1,1 3,8.... ,9 3,...,7

6) Colocá la coma a cada uno de los siguientes números para que queden ordenados de mayor a menor.

2357 406 41 60799 1000

En la tarea 4 se agrega la complejidad de usar varias relaciones al mismo tiempo. El docente podrá reproducir ejercicios de este tipo si lo considera necesario. Por ejemplo, ordenar los siguientes números de menor a mayor

4,201 4,2 4,22 4,9 4,010

Algunos números de la tarea 5 admiten más de una respuesta posible. Será interesante analizar con los alumnos cuáles son las diferentes posibilidades para cada cifra borrada.

El problema 6 admite diferentes respuestas. Por ejemplo, el primer número podría ser 23,57 ó 2,357.

Actividad 3

Sumas y restas: una oportunidad para analizar escrituras decimales

En la siguiente tarea se propone explotar el uso de las calculadoras no científicas para poner de relieve relaciones aritméticas que subyacen a las escrituras de los números decimales.

En la mayoría de las calculadoras simples, luego de hacer una suma de dos sumandos y poner el "=", si se sigue apretando varias veces la tecla "=" se sigue sumando el segundo sumando, tantas veces como se presione la tecla. Otras calculadoras hacen lo mismo al seguir apretando la tecla "+".

Aunque la tarea que proponemos podría realizarse sin calculadora, para los alumnos resulta más estimulante hacerla usando ese instrumento, sobre todo si tienen que anticipar los resultados sin calculadora y después pueden constatar que la anticipación fue correcta.

En la pregunta a) se espera identificar cómo se modifica la suma de los décimos al sumar 0,1, según sea dicha cifra 9 o un número diferente de 9. Una tarea como esta se puede repetir en diferentes ocasiones. A continuación se propone un "stock" de ejercicios similares para que el docente seleccione según sus necesidades.

SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

- 1] a) Si se hace " $3,6 + 0,1 =$ " y se aprieta la tecla "=", ¿qué números irán apareciendo sucesivamente?
- b) Si se hace lo mismo que en a) pero partiendo del número 5, ¿cuántas veces habrá que sumar 0,1 para llegar a 6? ¿Y para llegar a 10?
- c) Si se anota " $2,5 + 0,2 =$ " y se aprieta la tecla "=" 10 veces más, ¿qué números irán apareciendo?
- d) Si se anota " $8 + 0,2 =$ " y se aprieta la tecla "=", ¿cuántas veces hay que apretarla para llegar a 10?
- e) Si se anota " $8,5 + 0,5 =$ " y se aprieta la tecla "=" 5 veces más, ¿qué números irán apareciendo en la calculadora?
- f) Si a partir de 11,2 se suma 0,5 ocho veces, ¿qué números irán apareciendo en la calculadora?
- g) Si se parte del número 3, ¿cuántas veces hay que sumar 0,5 para llegar a 5?
- h) Si se anota el número 6 y se suma 30 veces el número 0,1, ¿qué número se obtiene?
- i) Si se parte del número 8,6, ¿cuántas veces hay que sumar 0,1 para llegar a 9? ¿Y para llegar a 10? ¿Y para llegar a 20?
- j) Si se parte del número 7, ¿cuántas veces hay que sumar 0,2 para alcanzar el número 10?
- k) Si se parte del número 10 y se resta sucesivamente 0,1, ¿qué números irán apareciendo, si se resta 12 veces?

Los cálculos que siguen apuntan a analizar cómo se van modificando las cifras de una escritura decimal cuando se suman sucesivamente centésimos y milésimos. La tarea busca poner de manifiesto las relaciones de valor entre las diferentes posiciones en la organización de la notación decimal de los números racionales. Uno de los números considerados (24,485) se ha incluido en todos los casos, para realizar las modificaciones de la escritura en función de los diferentes números que se van agregando. Será interesante hacer explícito con los alumnos el análisis de este ejemplo "testigo".

Del mismo modo en que lo venimos haciendo, se propone una lista de posibles ejercicios entre los que el docente podrá optar.

SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

- 2) a) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se suma sucesivamente 0,01:

3,06									
12,7									
24									
24,485									

- b) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se suma sucesivamente 0,05:

8,13									
36,8									
1,195									
24,485									

- c) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se suma sucesivamente 0,001:

3,06									
12,7									
24									
24,485									

- d) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se suma sucesivamente 0,005:

0,074									
9,28									
14,5									
24,485									

La tarea que se propone a continuación es similar a la anterior, pero más exigente para los alumnos, ya que se trata de restar sucesivamente algún número de manera de ir poniendo de relieve aspectos de la organización decimal de las escrituras. También aquí se repite el 24,485 para que se analicen las diferentes modificaciones en función de los números que se restan.

Como se ha señalado repetidas veces, se incluyen más ejercicios de lo que es posible realizar, con la intención de que el docente pueda seleccionar o eventualmente reservar algunos para los alumnos que necesiten tratar más estos temas.

SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

- 3) a) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se resta sucesivamente 0,01:

5,23									
29,7									
11,221									
24,485									

- b) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se resta sucesivamente 0,05:

3,06									
12,7									
24,485									

- c) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se resta sucesivamente 0,001:

3,4									
25,61									
24,485									

- d) Completá qué números irán apareciendo en la calculadora si, después de anotar el número de la columna gris, se resta sucesivamente 0,005:

3,641									
12,53									
18,2									
24,485									

A partir de las tareas que siguen deberá establecerse que, para sumar o restar algunos números cercanos a un entero, es conveniente apoyarse en ese entero. Por ejemplo, para sumar 0,9, resulta cómodo sumar 1 y restar un décimo; para sumar 0,99, sumar 1 y restar un centésimo; así como para restar 1,9, es útil restar 2 y sumar un décimo, etc. Probablemente este recurso será elaborado colectivamente a partir de la discusión sobre las estrategias puestas en juego. Es central que los alumnos comprendan y controlen cómo es posible estar seguro de que se está sumando o restando la cantidad requerida; es decir, por qué es equivalente sumar 0,9 a sumar 1 y luego restar 0,1; etcétera.



SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

4) Buscá una manera rápida de resolver los siguientes cálculos:

a) $4,3 + 0,9 =$

$15,2 + 2,9 =$

$42,15 + 0,99 =$

$12,6 + 0,99 =$

$25,7 + 3,99 =$

b) $34,5 - 0,9 =$

$3,5 - 1,9 =$

$10 - 4,9 =$

- Pensá una explicación que permita a otro chico usar el método que vos usaste para resolver fácilmente estos cálculos.
- Proponé otras sumas y restas con números decimales como las anteriores, para las cuales resulte útil pensar en un número entero. Intercambialas con un compañero y anoten en qué número se apoyan cada vez y qué cálculos hacen para resolverlo.

Los problemas que siguen apuntan a relacionar el análisis del significado de las cifras en las escrituras decimales con las operaciones de suma y resta. Se espera poner de relieve la composición aditiva de los números a partir de cantidades de diferente orden: decenas, unidades, décimos, centésimos, milésimos, etc.



SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

5) ¿Cómo se podrían anotar en la calculadora los siguientes números, usando solamente las teclas 1, 0, · y +?

a) 3,27

b) 13,508

6) ¿Cómo se podría hacer en la calculadora, sin borrar, para llegar a cero a partir de los siguientes números, si sólo se pueden usar las teclas 1, 0, · y -?

a) 4,73

b) 20,056

A través de la actividad que sigue se busca llevar a los alumnos a identificar que lo que conocen sobre los números naturales acerca de las sumas que dan 10, también sirve de apoyo para pensar sumas de décimos que dan 1, sumas de centésimos que dan un décimo; o de milésimos que dan un centésimo. Así, por ejemplo, es posible basarse en $3 + 7 = 10$, para saber que $0,3 + 0,7 = 1$ porque $\frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{10}{10} = 1$; o también que $0,04 + 0,06 = 0,1$ porque $\frac{4}{100} + \frac{6}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$; etcétera.

SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

7) ¿Cuánto hay que sumar a cada uno de los siguientes números para obtener 1?

- a) $0,3 + \dots = 1$
- b) $0,5 + \dots = 1$
- c) $0,7 + \dots = 1$

8) Calculá mentalmente:

$$0,06 + 0,04 =$$
$$0,02 + 0,08 =$$

9) ¿Cuánto hay que sumar a cada uno de los siguientes números para obtener 0,1?

- a) $0,05 + \dots = 0,1$
- b) $0,052 + \dots = 0,1$
- c) $0,008 + \dots = 0,1$

Cuando los alumnos realizan cálculos, es importante pedirles que estimen el orden de magnitud del resultado. Esta anticipación juega las veces de control sobre la resolución. Por ejemplo, $0,8 + 20$ no puede superar los 21; si a 27,7 se le resta 0,5, no puede dar un número menor que 27, porque se le está restando menos que 7 décimos.

Dentro del repertorio de cálculos que los alumnos conocen para los números naturales, se encuentran sumas tales como:

$$25 + 25 = 50$$
$$25 + 25 + 25 = 75$$
$$25 + 25 + 25 + 25 = 100$$
$$50 + 25 = 75$$
$$15 + 15 = 30$$
$$45 + 45 = 90$$

Y también restas asociadas a dichas sumas, como:

$$100 - 25 = 75$$

$$100 - 75 = 25$$

$$75 - 50 = 25$$

etc.

Estos conocimientos podrán usarse con los números decimales, para pensar cálculos como:

$$0,25 + 0,25$$

$$0,25 + 0,50 \text{ ó } 0,25 + 0,5$$

$$0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25$$

$$1 - 0,75$$

$$0,025 + 0,075$$

$$0,1 - 0,025$$

etc.

La tarea siguiente apunta a que los alumnos se den cuenta de que, para llegar al número natural más cercano, es suficiente hallar el complemento a 1 de la parte decimal.

 **SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES**

10) ¿Cuánto hay que sumarle a cada uno de los siguientes números para alcanzar el número natural más cercano?

- a) 4,8
- b) 0,45
- c) 23,79
- d) 6,06
- e) 8,99

En las tareas que siguen, se busca extender las relaciones a propósito de los complementos de números decimales al entero más cercano, a otras transformaciones aditivas que permitan establecer cómo "ir" de un número a otro. Así, por ejemplo, para averiguar cuánto sumar a 27,5 para obtener 28,2, se puede pensar en sumar 0,5 para obtener 28 y, luego, 0,2 para obtener finalmente 28,2. Se ha sumado entonces $0,5 + 0,2$, o sea 0,7.

- 11)** Completá el siguiente cuadro con los cálculos que permitirían obtener el resultado que aparece en la columna de la derecha:

Si anoto este número en la calculadora...	y le sumo...	obtengo...
42		43,5
27,5		28,2
56		56,06
5,925		5,955
5,925		6
5,925		10

- 12)** Completá el siguiente cuadro con los cálculos que permitirían obtener el resultado que aparece en la columna de la derecha:

Si anoto este número en la calculadora...	y le resto...	obtengo...
56		54,5
38,926		38,426
38,926		38,906

- 13)** Completá la columna del centro con un cálculo que permita obtener el resultado que aparece en la tercera columna a partir del número que se indica en la primera:

Si anoto en la calculadora...	y hago...	obtengo...
3,751		3,701
3,751		0,751
3,751		3,75
3,751		3,76

- 14)** Anotá en cada casillero vacío qué cálculo se podría hacer en la calculadora cada vez para que, a partir del número de la izquierda, aparezca como resultado el número de la derecha:

205,681		205,781		215,781		215,784		215,984
---------	--	---------	--	---------	--	---------	--	---------

La tarea que sigue apunta a que los alumnos analicen los cálculos sin realizarlos de manera efectiva y puedan estimar a partir de dicho análisis si los resultados son mayores o menores que un número dado. La riqueza de la tarea radica en la exigencia de producir algún argumento que justifique la respuesta. Por ejemplo, para decidir si $6,25 + 12,85$ es mayor o menor que 17, se espera que los alumnos puedan establecer que $6 + 12 = 18$, por lo cual la suma en cuestión debe ser mayor que 17.

SUMAS Y RESTAS: UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

15) Sin realizar el cálculo, buscá una manera de decidir si:

- el resultado de $6,25 + 12,85$ es mayor o menor que 17.
- el resultado de $7,24 - 4,3$ es mayor o menor que 3.
- el resultado de $8,76 + 2,35$ es mayor o menor que 11.

Los problemas 16 y 17 tienen por objetivo elaborar estrategias para calcular dobles y mitades para los números decimales. Se busca llevar a los alumnos a reconocer que, por ejemplo, a partir del conocimiento del doble de 3 pueden determinar el doble de 0,3. Será necesario prestar atención a lo que sucede con el cálculo de dobles que requieren agrupamientos; por ejemplo, el doble de 0,8; es común que algunos alumnos respondan que es 0,16. La aparición de estos errores –o su presentación por parte del docente para ser analizados– es una ocasión sumamente fructífera para volver sobre el significado de estos números: $\frac{8}{10} + \frac{8}{10} = \frac{16}{10} = 1 + \frac{6}{10}$. Por otro lado, se los puede remitir al doble de 0,5 para anticipar que el doble de 0,8 será mayor que 1.

El doble de 0,75 puede pensarse de diferentes maneras:

- el doble de 0,7 más el doble de 0,05;
- como $0,75 = 0,50 + 0,25$, el doble de 0,75 es el doble de 0,50 más el doble de 0,25;
- a partir del conocimiento sobre el dinero, el doble de 75 centavos es igual a \$1,50; etcétera.

Respecto del cálculo de mitades, algunos números resultan más sencillos que otros. Para calcular la mitad de 1,2 es posible pensar que $0,6 + 0,6 = 1,2$, apoyándose en $6 + 6 = 12$; o hacer la mitad de 1 más la mitad de 0,2, es decir $0,5 + 0,1$; etcétera.

También puede resultar fácil calcular la mitad de 0,06 aunque puedan aparecer errores respecto de la posición de los números (por ejemplo, dar 0,3 como respuesta). En ese caso, se volverá sobre la significación de la escritura.

En cambio, calcular la mitad de números como 1,7 puede resultar más complejo. Una posibilidad es que los alumnos entiendan que 1,7 es lo mismo que 1,70 y calculen la mitad de 1 más la mitad de 0,70, obteniendo como resultado 0,85.

El cálculo de la mitad de un número como 0,7 también puede ser difícil, ya que en el resultado se "agrega" una cifra a la parte decimal.



SUMAS Y RESTAS. UNA OPORTUNIDAD PARA ANALIZAR ESCRITURAS DECIMALES

16) Anotá el doble de los siguientes números:

- a) 0,3
- b) 0,5
- c) 0,8
- d) 0,25
- e) 0,75
- f) 1,2
- g) 3,45
- h) 0,55

17) Anotá la mitad de los siguientes números:

- a) 1
- b) 1,8
- c) 2,8
- d) 0,2
- e) 0,9
- f) 3
- g) 3,2
- h) 3,3

Encuadrar e intercalar números decimales

Actividad
4

En el conjunto de problemas que configuran esta actividad, se retoma y avanza sobre el trabajo de comparación y orden ya realizado. Se trata de comenzar a trabajar la idea de que, entre dos números decimales, siempre es posible encontrar otro número decimal. Esta idea rompe con lo que los alumnos ya conocen y es válido para los números naturales. Esta profundización, entonces, alcanza una introducción a la idea de densidad en el conjunto de los números decimales, idea compleja que los alumnos terminarán de elaborar más allá de la escuela primaria. Una primera actividad puede consistir en proponer a los alumnos que ubiquen un número decimal entre dos enteros. Damos algunos ejemplos:



ENCUADRAR E INTERCLAR NÚMEROS DECIMALES

1) ¿Entre qué números enteros se encuentran los siguientes números decimales?:

- | | | | |
|-----------------|------------------|-----------------|-------------------|
| a) ... 3,5 ... | c) ... 13,05 ... | e) ... 8,99 ... | g) ... 40,903 ... |
| b) ... 6,01 ... | d) ... 6,04 ... | f) ... 8,29 ... | h) ... 0,006 ... |

La tarea que se propone a continuación requiere ubicar algunos números decimales entre dos decimales dados cuya distancia es "próxima" (del orden de los décimos o de los centésimos). Esto hace insuficiente analizar sólo la parte entera y exige poner en juego estrategias de comparación que involucran las relaciones de valor de la escritura decimal. Una idea que subyace a estos problemas es que, entre dos números, por próximos que sean, pueden intercalarse todos los decimales que se deseen agregando cifras decimales.

 ENCUADRAR E INTERCALAR NÚMEROS DECIMALES

- 2) ¿Cuáles de los números que aparecen a continuación se encuentran entre 2,4 y 2,5?

2,409 2,53 2,41 2,3 2,05

A propósito de la tarea anterior se puede concluir que cualquier número de la forma 2,4... está entre 2,4 y 2,5, y que un número de la forma 2,5...es mayor que 2,5. Insistir en estas relaciones obliga a repensar todo el tiempo los significados de las escrituras decimales.

 ENCUADRAR E INTERCALAR NÚMEROS DECIMALES

- 3) Ubicá los números de la siguiente lista en la columna que corresponda. Algunos pueden ir en más de una columna y otros en ninguna:

8,15 10,7 0,45 10,11 2,12 2,5 0,105 3,48

Entre 0 y 4	Entre 2,2 y 3,5	Entre 8 y 10,25	Entre 0 y 0,5

- 4) a) ¿Cuáles son los dos números decimales con una sola cifra después de la coma más cercanos a los siguientes números?

3 3,05 6,73 8,16

- b) ¿Cuáles son los dos números decimales con sólo dos cifras después de la coma más cercanos a cada uno de los números de la lista anterior?

El análisis de este problema apuntará a resaltar que, pensando en décimos, 3 se encuentra entre 2,9 y 3,1; pensando en centésimos, 3 se encuentra entre 2,99 y 3,01.

Notemos que, si bien entre dos decimales hay infinitos decimales, si se agregan restricciones como, por ejemplo, limitarse a dos cifras después de la coma, la propiedad de la densidad deja de ser válida.

Los problemas que siguen solicitan intercalar números decimales entre dos dados; es decir, en ellos se establecen los límites de un intervalo dentro del cual los alumnos deberán proponer números. Existe una infinidad de respuestas válidas para cada uno de ellos. Será interesante retomar diferentes producciones y argumentar cómo es posible estar seguro de que son correctas, es decir, cómo es posible saber si los números propuestos se encuentran entre los números dados y cómo estas razones pueden establecerse a partir de un análisis sus escritura.

Como mencionamos anteriormente, la relación de orden presenta particularidades dentro de los números racionales en relación con lo que los niños han aprendido para los números naturales. A través de este conjunto de problemas, se busca que los alumnos lleguen a reconocer explícitamente que, entre dos números decimales, siempre se pueden intercalar decimales, si se recurre a subdivisiones cada vez menores. En relación con esta idea, 0,25 puede pensarse como ubicado entre 0,2 y 0,3 de la misma manera que 0,258. Este último, a su vez, puede pensarse como ubicado entre 0,25 y 0,3; etc. Ya sea para encuadrar un número decimal (dar dos números entre los cuales se encuentra) como para intercalar números decimales entre dos dados, se vuelven a poner en juego los conocimientos utilizados a propósito de las tareas de comparación y orden. En efecto, pensar un número entre otros dos, implica pensarlos a los tres en una serie ordenada. Por ello, la comparación de números confrontando las cifras del mismo rango se convierte en una herramienta central en los problemas de esta actividad.

ENCUADRAR E INTERCALAR NÚMEROS DECIMALES

- 5) En cada caso, completá con un número de manera tal que los tres números queden ordenados de menor a mayor:

- a) 0,3 ... 0,4
- b) 4,5 ... 5
- c) 0,2 0,9 ...
- d) 3,99 ... 4
- e) 0,1 ... 0,2
- f) 3,2 3,99 ...

6) Escribí un número entre:

- 34 35
3,4 3,5
16,7 16,8
8,52 8,6
3,416 3,417

7) Proponé tres números que se encuentren entre:

- a) 6,2 6,3
b) 6,25 6,28
c) 6,254 6,255
d) 6,254 6,25402

La intención es trabajar estas consignas de a una e ir "achicando" cada vez el intervalo con el que se trabaja para que los alumnos empiecen a reconocer la densidad de los números decimales. Se espera llegar a identificar que es posible seguir intercalando indefinidamente números entre dos dados, de modo que hay infinitos.

El análisis recaerá también en cómo generar esos números, profundizando sobre la base de las ideas construidas a propósito de la comparación. En definitiva, en las reflexiones abiertas en relación con este problema se puede establecer o retomar el hecho de que la idea de números consecutivos no es utilizable para los números decimales porque, como entre dos números decimales existen infinitos números, no es posible determinar un siguiente.

A modo de reutilización de estas relaciones, el docente puede proponer a los alumnos, por ejemplo, que escriban 15 números entre 0 y 0,2; etc. A continuación, siguen otros problemas que retoman los mismos conocimientos.

 ENCUADRAR E INTERCALAR NÚMEROS DECIMALES

8) Proponé dos números decimales entre los cuales se encuentren los siguientes números:

- a) ... $\frac{6}{4}$...
b) ... $\frac{2}{3}$...
c) ... $\frac{12}{5}$...
d) ... $\frac{18}{8}$...

Este último problema pone en juego encuadramientos y aproximaciones, vinculando fracciones y decimales. En la discusión colectiva, a partir del análisis de las diferentes respuestas, de la multiplicidad de respuestas correctas que se pueden ofrecer, es posible establecer que el encuadramiento se puede afinar siempre más, recuperando la idea de que, entre dos números racionales, siempre es posible encontrar otro.

Actividad
5

Los números decimales y la multiplicación y la división por 10, 100 y 1.000

A lo largo de esta actividad, se busca elaborar reglas para la multiplicación y la división por potencias de 10 en los números decimales, que permitan también reinterpretar las reglas construidas en el trabajo con los números naturales. La comprensión de las mismas se fundamentará en el significado de las escrituras numéricas. Es decir, se trata de que no existan reglas aisladas para las multiplicaciones y divisiones por 10, 100 y 1.000 para números naturales por un lado y decimales por otro, sino de que aquellas reglas acerca del "agregado o quitado" de ceros, o de la determinación de cociente y resto al dividir por 10, 100, 1.000, etc. cobren un nuevo significado en relación con el corrimiento en el orden de magnitud de cada cifra.

Esta tarea remite al trabajo realizado a propósito de la actividad 1. Antes de realizar los cálculos que aquí se proponen puede resultar interesante que se repasen las relaciones establecidas en esa oportunidad. Se les puede pedir a los alumnos que revisen las anotaciones realizadas a propósito de las multiplicaciones por potencias de 10 en aquella oportunidad. Luego del repaso se puede proponer la siguiente tarea.

LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

1) a) Calculá:

$$1 : 10 =$$

$$10 \times 0,1 =$$

$$1 : 100 =$$

$$10 \times 0,01 =$$

$$10 : 100 =$$

$$1.000 \times 0,001 =$$

$$100 : 1.000 =$$

b) Buscá una manera de resolver el siguiente cálculo y explicá cómo encontraste el resultado:

$$12,25 \times 10 =$$

Se trata de llevar al grupo a analizar esta multiplicación a partir de la utilización de la propiedad distributiva.

$$12,25 = 12 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\begin{aligned}12,25 \times 10 &= 12 \times 10 + \frac{2}{10} \times 10 + \frac{5}{100} \times 10 = \\&= 120 + \frac{20}{10} + \frac{50}{100} = \\&= 120 + 2 + \frac{5}{10} = 122,5\end{aligned}$$

Será interesante organizar una instancia de discusión con toda la clase. Para ello, el docente puede reseñar las diferentes respuestas de sus alumnos y agregar alguna que corresponda a errores frecuentes en esta tarea, aunque no hayan surgido en ese momento en el grupo. Otra posibilidad es comentar a los alumnos que, en otro grado, a partir de esta misma actividad surgieron las respuestas que él va a transcribir en el pizarrón. Por ejemplo, para esta multiplicación podrían aparecer (o se podrían analizar):

122,50 122,5 12,250 120,45 1225 120,250

Es importante que, por el momento, el docente no se pronuncie acerca de los resultados para dar lugar a que sean los alumnos quienes busquen argumentos a favor o en contra de cada uno de los números que sean presentados.

Se puede pedir a los niños que copien los resultados y anoten, para cada uno de ellos, si les parece correcto o incorrecto y expliquen por qué. Este trabajo podría ser realizado en pequeños grupos. Los argumentos podrán ser expuestos en un afiche para organizar un análisis colectivo. Luego, el docente podrá seleccionar algunos resultados y argumentos o diferentes argumentos para un mismo resultado.

Una vez expuestos, se dejará un tiempo para que todos los grupos puedan conocer las observaciones de los demás y pronunciarse acerca de si están de acuerdo o no, ya sea acerca de la corrección o la incorrección de la respuesta, o acerca de la explicación.

En la discusión posterior, se trata de poner en evidencia y rechazar las extensiones erróneas de la regla de los ceros y poner de relieve procedimientos de cálculo que se apoyen en la significación de las cifras y en la referencia a las fracciones decimales.



LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

2) a) Señalá la opción correcta:

$$4,25 \times 10 =$$

40,25 4,250 42,5

b) ¿Por qué te parece que la que elegiste es la correcta?

La parte a) de la última tarea retoma las mismas relaciones: nuevamente se confronta a los alumnos con la necesidad de elegir entre 3 resultados dados que contemplan errores frecuentes. Para ello, deben considerar en principio las tres respuestas posibles y producir alguna explicación para sí mismos que los lleven a elegir la opción correcta y rechazar las erróneas.



LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

3) Buscá una manera de resolver las siguientes multiplicaciones:

a) $0,2 \times 10 =$

b) $0,4 \times 10 =$

c) $10 \times 3 =$

d) $10 \times 3,4 =$

e) $0,01 \times 10 =$

f) $0,21 \times 10 =$

g) $10 \times 0,54 =$

h) $10 \times 5,45 =$

i) $23 \times 10 =$

j) $10 \times 14,5 =$

k) $23,15 \times 10 =$

l) $14,234 \times 10 =$

Después de resolver el primer grupo de cálculos, es posible retomar las reflexiones realizadas anteriormente y se podrá establecer que:

$$0,1 \times 10 = 1; \text{ entonces } 0,2 \times 10 = 2.$$

Es decir, a partir de $0,1 \times 10$ pueden explicarse las multiplicaciones de decímos por 10.

Una relación a la que puede recurrirse en la primera parte es a la de componer un producto a partir de los resultados de otros. Por ejemplo, para hacer $10 \times 3,4$ es posible apoyarse en que "se sabe" que $10 \times 0,4 = 4$ y que $3 \times 10 = 30$, porque ya fueron resueltos. Entonces, $10 \times 3,4$ tiene que dar la suma de los dos resultados anteriores.

También podrá apelarse a explicaciones basadas en las fracciones decimales:

$$10 \times 3,4 = 10 \times \frac{34}{10} = \frac{340}{10} = 34$$

De manera análoga, podrán explicarse las multiplicaciones por 10 de números decimales que contengan centésimos o milésimos:

Como $10 \times 0,1 = 1$ y $10 \times 0,01 = 0,1$, entonces
 $10 \times 0,54 = 10 \times 0,5 + 10 \times 0,04$

O también:

$$10 \times \frac{54}{100} = \frac{540}{100} = 5 + \frac{40}{100} = 5,4$$

O también:

$$\begin{aligned} 10 \times \frac{54}{100} &= 10 \times \frac{5}{10} + 10 \times \frac{4}{100} = \frac{50}{10} + \frac{40}{100} = 5 + \frac{40}{100} = \\ &= 5 + \frac{4}{10} = 5,4 \end{aligned}$$

En síntesis, esta tarea apunta a que se despliegue un conjunto de relaciones que enlace el valor posicional, las escrituras, las fracciones decimales y las multiplicaciones por 10.

Más allá de las explicaciones a las que recurran los niños, seguramente sea necesario que el maestro las retome y sistematice en un discurso coherente y articulado en el que explique que la multiplicación por 10 "convierte" a los centésimos en décimos y a los décimos en enteros, y esta explicación justifica el funcionamiento de la operación.



LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

4) Revisá las tareas 1, 2 y 3 de esta actividad y tratá de resolver las siguientes multiplicaciones:

$$12,25 \times 100 =$$

$$12,25 \times 1.000 =$$

Esta tarea permite extender el trabajo realizado sobre las multiplicaciones por 10 a otros cálculos donde uno de los factores es 100 ó 1.000. A su vez, vuelve sobre el análisis de los errores usuales —que posiblemente aparezcan otra vez aquí— que fue motivo de estudio en la primera parte de esta actividad.

Será interesante analizar tanto las diferentes soluciones ensayadas por los alumnos como también los procedimientos —correctos o no— que el docente decida presentar para ofrecer a discusión de todo el grupo.

A partir del cálculo, el maestro puede explicitar distintas relaciones. Algunas de ellas basadas en la distribución del 12,25:

$$12 \times 100 + 0,25 \times 100$$

$$12 \times 100 + 0,2 \times 100 + 0,05 \times 100 =$$

$$= 12 \times 100 + \frac{2}{10} \times 100 + \frac{5}{100} \times 100$$

Y otras vinculadas al uso de la asociatividad:

$$12,25 \times 10 \times 10$$

Se puede aprovechar esta explicación para analizar y generalizar la equivalencia entre multiplicar dos veces por 10 y una vez por 100; multiplicar tres veces por 10 y una vez por 1.000; multiplicar por 10 y por 100 y multiplicar por 1.000. Estas equivalencias deben quedar fundamentadas en que el número 100 puede pensarse como 10×10 y el número 1.000 puede pensarse como $10 \times 10 \times 10$ ó 100×10 .

LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

- 5) a) Recordá la regla que usás para multiplicar por 10, 100 ó 1.000 un número entero. Ahora, de a dos, ¿podrían escribir una regla para multiplicar por 10, 100 y 1.000 cualquier número decimal?
- b) Piensen si es posible escribir una única regla que sirva para los enteros y los decimales.

Luego de responder el ítem a), será necesario revisar y reflexionar con los alumnos acerca de las reglas anotadas, llevándolos a fundamentarlas, discutir si están de acuerdo, si esas reglas funcionarían para cualquier número decimal. En este momento, será importante detenerse en la comprensión del funcionamiento de estas multiplicaciones.

La multiplicación de números decimales por 10, 100 o 1.000 no da lugar a la formulación de una regla por parte de los niños tan rápidamente como ocurre con los números naturales.

El propósito del ítem b) consiste en que los alumnos puedan advertir que ambas reglas, aquella construida para los números naturales (regla de los ceros) y una regla sobre el corrimiento de la coma para los decimales, están basadas en un funcionamiento común: debido a que el sistema de numeración está organizado en agrupamientos de a 10, cada vez que se multiplica por 10, las cifras de una posición alcanzan la posición inmediata superior; es decir, las unidades se convierten en decenas, las decenas en centenas, los décimos en unidades, los centésimos en décimos, etc. Se trata, por un lado, de revisar —a propósito de los dos ítem— por qué, al multiplicar por 10, se corren todas las cifras un rango; al multiplicar por 100, se corren dos rangos, etc. y volver sobre la regla de "agregar ceros" poniendo estas dos cuestiones en relación. Nos proponemos entonces invitar a los niños a revisar la regla de los ceros, ubicándola en una fundamentación de alcance más general. Esta explicación integra en

una única regla la multiplicación por potencias de 10 de cualquier número. Más adelante, a lo largo de esta misma actividad, se incluirá la explicación de la división por potencias de 10.

Si los errores nos muestran concepciones erróneas de los chicos, el éxito no necesariamente nos da cuenta de una comprensión adecuada. Puede ser fruto de una aplicación mecánica de reglas. No podemos suponer, a partir de la ausencia de errores, que los alumnos están atribuyendo una significación correcta a las diferentes cifras de la escritura decimal y a las transformaciones que sufren al multiplicarlas por potencias de la base. En ese sentido, también cobra particular interés generar y sostener procesos de argumentación para las respuestas obtenidas, que permitan traer a escena las razones del funcionamiento de las reglas.



LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

6) Resolvé estos cálculos:

a) $1 : 10 =$

b) $0,1 : 10 =$

c) $5,4 : 10 =$

d) $5,4 : 100 =$

e) $150 : 100 =$

f) $28 : 100 =$

Estas divisiones comienzan retomando una relación que ya fue abordada al comienzo de esta actividad: $1 : 10 = 0,1$. Este cálculo resulta clave para realizar los siguientes ya que, por ejemplo, para $0,1 : 10$ se puede pensar que 0,1 es la décima parte de 1, entonces el resultado de esta cuenta deberá ser la décima parte del cálculo anterior. Esta no es la única manera de pensarlo, pero debe quedar explicitada la relación inversa entre multiplicar y dividir por la potencia de la base ($1 : 10 = 0,1$ y $0,1 \times 10 = 1$).

Para hacer $5,4 : 10$ se puede apelar a la propiedad distributiva:

$$5 : 10 + 0,4 : 10 = 0,5 + 0,04 = 0,54$$

En todos los casos, se podrá apelar a la multiplicación para verificar los resultados hallados. En este último ejemplo, $0,54 \times 10 = 5,4$.



LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

- 7) a) Cuando dividís por 10, 100 y 1.000 en los números enteros, vos ya sabés una regla para hallar fácilmente el cociente y el resto. Revisala.
- b) Resolviste varias divisiones de decimales por 10 y 100. ¿Podrías escribir una regla que permita averiguar fácilmente el resultado de esas divisiones?
- c) Fijate si ahora es posible armar una única regla que sirva para los números enteros y decimales. Quizás te pueda servir lo que pensaste para las multiplicaciones por 10, 100 y 1.000.

De manera similar que para las multiplicaciones por potencias de la base, se trata ahora de revisar las reglas construidas para dividir por 10, 100 y 1.000 en los números naturales. Esta regla debe fundamentarse también en el cambio de orden de las unidades al dividirlas por 10. Dado que la organización de las escrituras decimales —que extiende la de nuestro sistema de numeración— se basa en agrupamientos de a 10, cada vez que una unidad se divide por 10, se convierte en una unidad del orden inmediato inferior. De esa manera, las centenas se convierten en decenas, las decenas en unidades, las unidades en décimos, los décimos en centésimos, etc. Es decir, llegamos a la misma explicación construida para la multiplicación: multiplicar o dividir por 10, 100, 1.000, etc. hace que las cifras cambien de orden. Si se multiplica por esos números, se convierten en unidades de un orden superior; si se divide, en unidades de orden inferior.

Estas relaciones permitirían también vincular el trabajo entre división entera y exacta. Al buscar cociente y resto al dividir por 10, el resto está constituido por la cifra de las unidades que no llegan a formar otro grupo de 10. En la división exacta, esas unidades forman décimos. Algo similar podría decirse de la división por 100 y 1.000 y los centésimos y milésimos que se forman en la división exacta.

LOS NÚMEROS DECIMALES Y LA MULTIPLICACIÓN Y LA DIVISIÓN POR 10, 100 Y 1.000

- 8) Si en la calculadora se anota el número que aparece en la columna de la izquierda, ¿cómo se podría hacer, con un solo cálculo, para obtener el resultado que aparece en la columna de la derecha?

Número anotado	Cálculo propuesto	Resultado esperado
17,3		1,73
0,325		32,5
82,9		8,29

Número anotado	Cálculo propuesto	Resultado esperado
0,236		23,6
3		0,3
15		1,5
2,1		210
3.280		3,28

- 9)** Si en la calculadora se anota el número que aparece en la columna de la izquierda, ¿cómo se podría hacer, usando las teclas + y x, para obtener el resultado que aparece en la columna de la derecha? Esta vez podés hacer más de un cálculo.

Número anotado	Cálculo propuesto	Resultado esperado
35,62		356,23
5,2		62
6,207		624,7
28,9		290

Cada uno de estos cálculos requiere de una suma y una multiplicación. Existen diferentes caminos de resolución según cuál de las dos operaciones se realice primero. Por ejemplo, para convertir 35,62 en 356,23 es posible sumar primero 0,003 y luego multiplicar por 10 el número, o multiplicar por 10 y luego sumar 0,03.

Actividad
6

Multiplicar y dividir por 0,1, 0,01 y 0,001

MULTIPLICAR Y DIVIDIR POR 0,1, 0,01 Y 0,001

1) Calculá:

a) $7 : 10 =$	c) $87 : 10 =$	e) $123 : 10 =$
b) $15 : 10 =$	d) $100 : 10 =$	f) $103 : 10 =$

La relación $1 : 10 = 0,1$ resulta clave para que los niños avancen en esta tarea. Se buscará que reconozcan que dividir un número por 10 es equivalente a multiplicarlo por 0,1. Una forma de pensar esta relación puede ser, por ejemplo para el primer cálculo:

$$\begin{aligned}
 7 : 10 &= (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) : 10 = \\
 &= 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = \\
 &= 7 \times 0,1 = 0,7
 \end{aligned}$$

El maestro puede proponer otros ejemplos para que los alumnos exploren y constaten que dividir por 10 es lo mismo que multiplicar por 0,1. De manera análoga, se puede proponer que investiguen la relación entre la división por 100 y multiplicar por 0,01.



MULTIPLICAR Y DIVIDIR POR 0,1, 0,01 Y 0,001

2) Calculá:

a) $8 \times 0,1 =$ b) $24 \times 0,1 =$ c) $50 \times 0,1 =$ d) $70 \times 0,1 =$ e) $100 \times 0,1 =$

En esta tarea se propone a los niños una serie de multiplicaciones por 0,1. Retomemos, por ejemplo, la multiplicación $50 \times 0,1 = 5$. De esta relación surgen dos divisiones:

$$5 : 0,1 = 50 \text{ y } 5 : 50 = 0,1$$

Se les pedirá a los niños que, a partir de las multiplicaciones anteriores, exploren el resultado de dividir por 0,1 el producto obtenido en cada caso.

Otra alternativa puede ser analizar que $1 : 0,1$ es hallar un número que, multiplicado por 0,1, dé por resultado 1; ese número es 10. Esta relación ya está disponible, será importante identificar y concluir que dividir por 0,1 es lo mismo que multiplicar por 10. De la misma manera, dividir por 0,01 es lo mismo que multiplicar por 100.



MULTIPLICAR Y DIVIDIR POR 0,1, 0,01 Y 0,001

3) Sabiendo que $4,2 \times 2,6 = 10,92$, calculá:

a) $42 \times 2,6 =$ b) $4,2 \times 26 =$ c) $42 \times 26 =$ d) $0,42 \times 2,6 =$ e) $4,2 \times 260 =$

Resolver esta tarea ofrece la oportunidad de utilizar las relaciones recién analizadas. En efecto, para poder hallar el resultado en el caso a), es necesario establecer que 42 es 10 veces el 4,2 del cálculo original; por lo tanto, el resultado será necesariamente el producto de $10,92 \times 10$.

Este mismo razonamiento se puede desplegar a lo largo de los cálculos siguientes, pero es necesario tener presente que en algunos casos hay más de una relación en juego. Por ejemplo, para 42×26 debe considerarse que:

$$42 \times 26 = 4,2 \times 10 \times 2,6 \times 10 = 4,2 \times 2,6 \times 10 \times 10 = 4,2 \times 2,6 \times 100 = 10,92 \\ \times 100 = 1.092$$

Es decir, el resultado deberá ser 100 veces 10,92, porque cada uno de los factores que están en juego es 10 veces el correspondiente factor original.

Actividad
7

Multiplicación de un número decimal por un número natural



MULTIPLICACIÓN DE UN NÚMERO DECIMAL POR UN NÚMERO NATURAL

1) Anotá el resultado de las siguientes multiplicaciones:

a) $0,4 \times 3 =$
b) $0,6 \times 4 =$
c) $2,3 \times 2 =$

d) $6 \times 0,9 =$
e) $3,5 \times 4 =$

Se espera que los niños realicen esta tarea (y las de los problemas que siguen) sin recurrir a algoritmos convencionales. Los alumnos quizás resuelvan estas multiplicaciones apelando a sumas. En el análisis colectivo se intentará mostrar que, por ejemplo, para $0,4 \times 3$, puede pensarse como $4 \times 0,1 \times 3 = 12 \times 0,1 = 1,2$; o, para $6 \times 0,9$, como $6 \times 9 \times 0,1 = 54 \times 0,1 = 5,4$. Es decir, es posible pensarlo como una multiplicación de enteros por números del tipo 0,1; 0,01, 0,001, etcétera.

Es importante recalcar a los niños que pueden apelar aquí al repertorio de resultados multiplicativos de que disponen.

Examinemos otro ejemplo: $3,5 \times 4$; puede explicarse a partir de su descomposición como $3 \times 4 + 0,5 \times 4 = 12 + 5 \times 0,1 \times 4 = 12 + 20 \times 0,1 = 12 + 2 = 14$.

Una vez comprendidas estas relaciones, el docente podrá presentar la regla consistente en multiplicar los números como si fueran enteros y ubicar luego la coma.

En el problema siguiente se extiende esta relación a números mayores pero redondos. A partir de su análisis, se espera que los niños reconozcan que, del mismo modo que hacen con los números naturales, multiplicar por ejemplo por 20 equivale a multiplicar primero por 2 y luego por 10.

MULTIPLICACIÓN DE UN NÚMERO DECIMAL POR UN NÚMERO NATURAL

2) Resolvé las siguientes multiplicaciones:

a) $0,2 \times 20 =$ b) $0,5 \times 40 =$ c) $25 \times 0,2 =$ d) $20 \times 0,9 =$ e) $200 \times 2,5 =$

Actividad
8

Multiplicación de dos números decimales entre sí

A través de esta actividad se busca revisar la regla según la cual, para multiplicar decimales, se multiplican los números "como si no tuvieran coma" y luego se ubica la coma en función de la cantidad de cifras decimales de los factores. Para ello, el punto de apoyo elegido es descomponer cada factor en el producto de un número natural por un decimal del tipo 0,1 ó 0,01 ó 0,001, etcétera.

El camino propuesto no es el único posible para reconstruir la regla para multiplicar decimales. Se ha hecho esta opción porque fuerza a que los alumnos "piensen" los decimales como el producto de un natural por un número del tipo 0,1; 0,01; etc., lo cual ofrece la posibilidad de revisar –una vez más– el significado de la notación decimal. A la vez, habrá que aplicar la propiedad conmutativa y asociativa de la multiplicación.

La idea es entonces que, por ejemplo, para calcular $0,8 \times 0,6$, los alumnos puedan hacer la siguiente descomposición:

$$0,8 \times 0,6 = 8 \times 0,1 \times 6 \times 0,1 = 8 \times 6 \times 0,1 \times 0,1 = 48 \times 0,01 = 0,48$$

Es claro que, para que puedan comprender los pasos anteriores, necesitan un buen dominio de la multiplicación por números del tipo 0,1; 0,01, etc., asunto cuyo tratamiento se ha propuesto en la actividad 6. A modo de ejemplo, se sugieren algunos cálculos que el docente podrá "recrear" en función de las necesidades de su grupo. La consigna elegida remite a relacionar estos cálculos con los realizados en la actividad 6. Se han elegido números de modo tal que la multiplicación de los números "sin coma" que se requiere para el cálculo sea sencilla. De esta manera, se puede hacer énfasis en discutir –esto es, decidir y justificar– la ubicación de la coma.



MULTIPLICACIÓN DE DOS NÚMEROS DECIMALES ENTRE SÍ

1) En varios de los problemas anteriores aplicaste las siguientes ideas:

- 0,4 puede pensarse como $4 \times 0,1$
- 0,05 puede pensarse como $5 \times 0,01$
- 3,6 puede pensarse como $36 \times 0,1$; etc.

¿Cómo podrías usar eso que sabés para resolver estas multiplicaciones?

- a) $0,8 \times 0,6 =$
- b) $0,5 \times 0,5 =$
- c) $0,3 \times 0,08 =$
- d) $0,05 \times 0,2 =$
- e) $0,004 \times 0,7 =$
- f) $2,4 \times 0,2 =$
- g) $1,25 \times 0,2 =$

En continuidad con los análisis realizados para las actividades 6 y 7, se podrán generalizar esas relaciones a cualquier multiplicación con decimales. La actividad es una oportunidad para tratar explícitamente en la clase la relación entre la regla para multiplicar decimales y las descomposiciones de los números que se han realizado.

Los cálculos involucrados en esta actividad serán también una oportunidad para analizar qué sucede cuando se multiplica un número por otro menor que 1 y relativizar la idea construida por los niños sobre los números naturales acerca de que la multiplicación "agranda" los números.

La tarea siguiente reinvierte los conocimientos sobre multiplicación con números decimales. Ahora se pide buscar un factor desconocido de una multiplicación, dado otro factor y el producto.



MULTIPLICACIÓN DE DOS NÚMEROS DECIMALES ENTRE SÍ

2) Completá los siguientes cálculos:

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| a) $6 \times \dots = 0,6$ | e) $5 \times \dots = 2$ |
| b) $6 \times \dots = 1,2$ | f) $4 \times \dots = 2$ |
| c) $12 \times \dots = 0,12$ | g) $6 \times \dots = 3$ |
| d) $5 \times \dots = 1$ | h) $4 \times \dots = 1$ |

Nótese que los puntos f) y g) pueden constituir una oportunidad para volver a analizar que multiplicar por 0,5, equivale a dividir por 2.

Algunas multiplicaciones particulares

Actividad
9

a) Multiplicar por 0,5

Se propone retomar algunos de los casos de la actividad anterior y preguntar a los alumnos si es cierto que "multiplicar por 0,5 equivale a calcular la mitad". Se trata de una conjetura que los niños deberán explorar y validar. Se espera llegar a establecer que:

- $0,5 = \frac{1}{2}$; por lo tanto, multiplicar por 0,5 es equivalente a calcular la mitad;
- $0,5 = 5 \times 0,1 = 5 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{2}$.

Establecida la regla, el docente podrá proponer ejemplos para que los alumnos la pongan en juego. Damos sólo algunos:

12 x 0,5
1,2 x 0,5
72 x 0,5
7,2 x 0,5
0,4 x 0,5
0,04 x 0,5
etc.

b) Multiplicar por 0,25

De manera análoga a la propuesta para que los alumnos exploren el resultado de multiplicar por 0,5, se propone que analicen el efecto de multiplicar por 0,25. Se espera que los niños lleguen a establecer que 0,25 equivale a $\frac{1}{4}$ y que, por tanto, multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir por 4. La riqueza de la actividad consiste en que exploren y formulen una conjetura para que luego produzcan argumentos para validarla.

Una vez desplegados los argumentos, se puede pedir a los niños que ellos mismos propongan ejemplos que "muestren" el funcionamiento de la regla producida.

Estimaciones

Actividad
10

En esta actividad se propone que los alumnos estimen el resultado de multiplicaciones de números decimales. En las dos tareas, dados diferentes intervalos posibles, los alumnos deben seleccionar en cuál de ellos se encuentra el resultado de una multiplicación. A diferencia de la primera tarea, la segunda incluye factores menores que 1.

La actividad apunta a construir criterios de estimación, los que, en general, no se elaboran de manera espontánea. Será necesario orientar el tipo de cálculo en el que se pueden basar los alumnos. Por ejemplo, si se tratara de establecer si $2,5 \times 74$ se encuentra entre 70 y 80, entre 100 y 200 o entre 10 y 20, se podría analizar que multiplicar por 2,5 es hacer dos veces y media el número. Para encuadrar el resultado de $13,2 \times 9$ puede resultar útil multiplicar el número por 10; para $22 \times 12,45$, podrá pensarse que es mayor que 20×12 , que es 240, y menor que 22×13 , que es 286. Para estimar el intervalo en el que se encuentra $0,43 \times 49$, se puede analizar que el resultado de dicho cálculo es cercano a la mitad de 50; etcétera.

Como podrá notarse, no es posible identificar modos únicos de estimar: se puede apelar a diferentes recursos en función de los números en juego.

Es también una oportunidad para volver sobre el análisis de una cuestión que los niños se resisten a aceptar: cuando uno de los factores es menor que 1, el resultado de la multiplicación es menor que el otro factor.

ESTIMACIONES

- 1) Sin hacer las cuentas, señalá entre qué números se encuentra el resultado de las siguientes multiplicaciones:

$2,75 \times 74:$	entre 70 y 80	entre 100 y 200	entre 10 y 20
$13,2 \times 9:$	entre 70 y 90	entre 100 y 200	entre 900 y 1.000
$22 \times 12,45:$	entre 20 y 300	entre 2.000 y 3.000	entre 600 y 700
$65 \times 6,14:$	entre 3.000 y 4.000	entre 35 y 45	entre 350 y 450

- 2) Sin hacer las cuentas, señalá entre qué números se encuentra el resultado de las siguientes multiplicaciones:

$0,43 \times 49:$	entre 2 y 3	entre 20 y 30	entre 40 y 50
$0,24 \times 125:$	entre 0,5 y 1	entre 5 y 10	entre 20 y 40
$98 \times 0,11:$	entre 10 y 15	entre 100 y 150	entre 20 y 30
$205 \times 0,8:$	entre 10 y 20	entre 50 y 100	entre 150 y 200

Porcentajes

Porcentaje es un concepto que se encuentra en el cruce entre proporcionalidad directa y fracciones. Es conceptualmente importante porque permite "atar" diferentes cabos: es una manera de representar la fracción de una cantidad y, al mismo tiempo, es una noción que puede inscribirse en el contexto de la proporcionalidad directa (calcular, por ejemplo, el 30% de diferentes cantidades remite a una relación entre dos magnitudes de la misma naturaleza en la que la constante de proporcionalidad es 0,30).

El concepto de porcentaje también adquiere relevancia por su uso social ampliamente difundido (y exigido por la sociedad a la escuela). Además del tratamiento en profundidad que el tema requiere, es central que los niños dispongan de manera sólida del significado de algunos "porcentajes famosos":

- El 25% de una cantidad es equivalente a $\frac{1}{4}$ de dicha cantidad.
- El 50% de una cantidad es $\frac{1}{2}$ de dicha cantidad.
- El 10% es la décima parte.

También es relevante que los niños puedan comprender que, si bien el 10% de una cantidad es equivalente a $\frac{1}{10}$ de dicha cantidad, no es cierto que el 30% sea equivalente a $\frac{1}{30}$.

Para el cálculo de porcentajes "redondos" (20%, 30%, 60%, etc.) es interesante difundir que es posible apoyarse en el cálculo del 10%. Así, deberán comprender que para calcular, por ejemplo, el 40% de una cantidad, deben dividir por 10 y multiplicar por 4, lo cual a su vez equivale a multiplicar por 0,40.

Bajo la modalidad del cálculo mental se puede analizar también cómo realizar el cálculo del complemento a 100 de un cierto porcentaje. Por ejemplo: si descuentan el 20% del precio de una mercadería, hay que pagar el 80%; si hubo un 30% de inasistencia a una reunión, eso significa que concurrió el 70% de las personas, etcétera.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, el docente puede proponer calcular el 50%; el 25%, el 40%, etc. de diferentes cantidades (naturales y decimales).

También será de interés que plantee actividades del siguiente tipo:

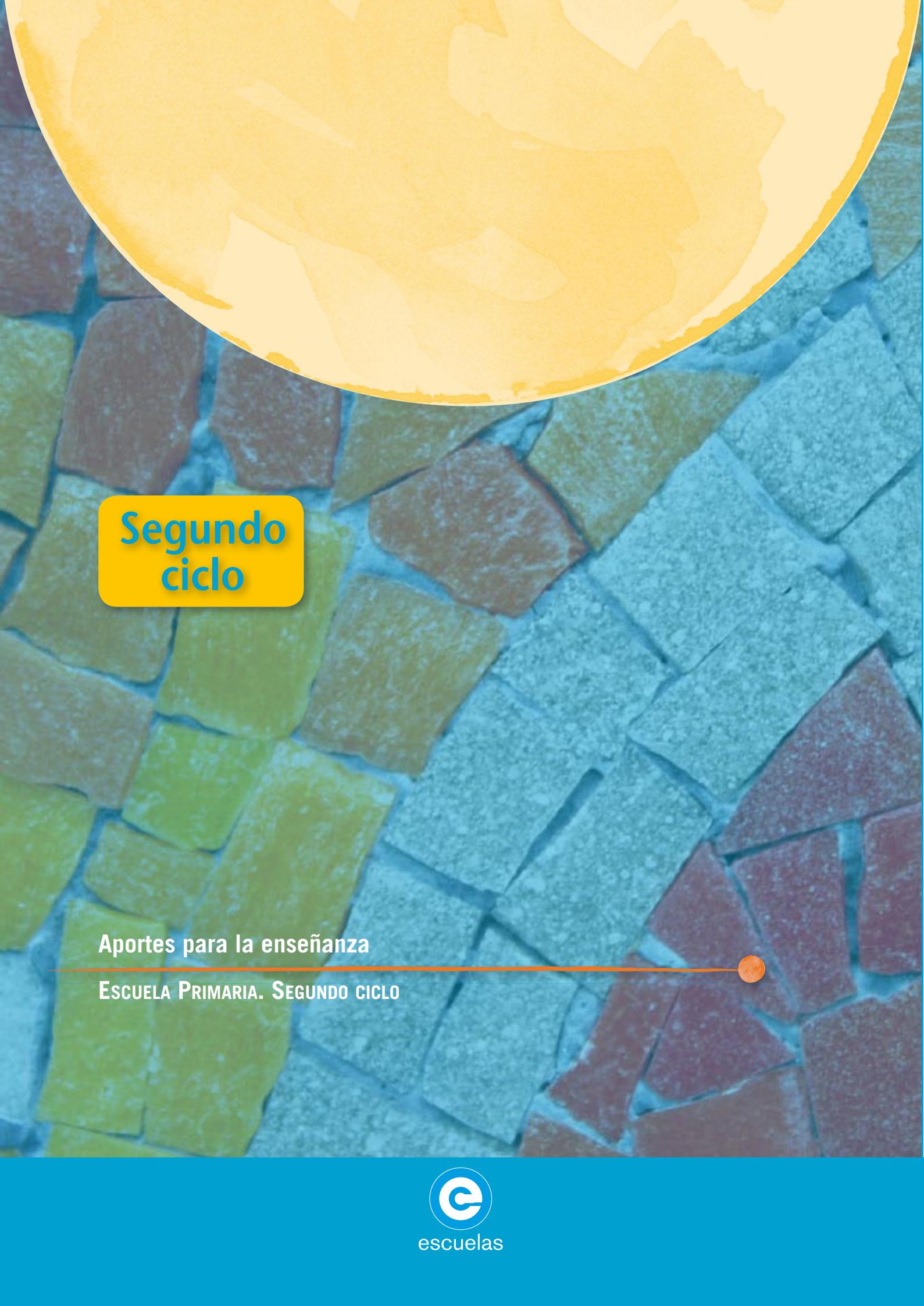


PORCENTAJES

- 1) Si hubo un 30% de ausentismo a la reunión de cooperadora y asistieron 140 personas, ¿cuántas personas habrían concurrido si hubiera habido asistencia perfecta?
- 2) Me descontaron el 20% y pagué \$160. ¿Cuál era el precio original sin descuento?



Se terminó de imprimir en Agosto de 2011
en Melenzane S.A.



Segundo ciclo

Aportes para la enseñanza

ESCUELA PRIMARIA. SEGUNDO CICLO